자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

(1) 자연수 a와 자연수 b에 대하여 자연수 q가 존재하여 $a=bq$이면 a를 b의 배수, b를 a의 약수라 한다.

(2) 자연수 a와 자연수 b의 공약수 중에서 가장 큰 수를 자연수 a와 자연수 b의 최대공약수라 한다.

(3) 자연수 a와 자연수 b에 대하여 $a=bq+r$, $0 \le r < b$를 만족시키는 q와 r이 존재한다. 이때 q를 a를 b로 나누었을 때의 몫, r를 나머지라고 한다.

(4) 다항식 A를 다항식 $B\,(B \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
$A=BQ+R$가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

(5) (수학적 귀납법) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
  (1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
  (2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
    $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[1] 임의의 자연수 n에 대하여 $a=2^n \times 3^{2n}-1$이 17의 배수임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.(10점)

[2] 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때 몫 q_1, q_2와 나머지 r_1, r_2가 존재하여 $a=bq_1+r_1=bq_2+r_2$가 성립한다고 한다. 그러면 $q_1=q_2$이고 $r_1=r_2$임을 증명하시오.(10점)

[3] 함수 $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 다음과 같이 정의하자. ($\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다.)

$a \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(a)=k$ (k는 a와 2의 최대공약수)

  (1) 함수 f가 다음 성질을 만족하는지 판정하고 이유를 설명하시오.(3점)

모든 $a, b \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(ab)=f(a)f(b)$이다.

  (2) $f(a)=1$이고 $f(b)=1$인 a와 b에 대하여 $f(ab)=f(a)f(b)$가 성립함을 증명하시오.(6점)

[4] 실수 a, b에 대하여 두 다항식을 $f(x)=ax^{2016}+bx^{523}-6$, $g(x)=x^2+x+1$라 놓으면 제시문 (4)에 의하여 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$를 만족하는 다항식 $q(x)$와 $r(x)$가 존재한다. $r(x)=0$일 때 ab를 구하시오.(9점)

[5] 다항식 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{N})$에 대하여 집합 X와 집합 Y를 다음과 같이 정의하자.

$$X=\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)+g(x)=0\}, \quad Y=\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)g(x)=0\}$$

$X=\{2,k\}$, $Y=\{2,3,8\}$일 때 k를 구하시오. ($\mathbb{R}$는 모든 실수의 집합이고 $\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다.) (12점)

■ 출제 의도

자연수의 약수와 배수에 대한 이해력을 평가하고 몫과 나머지가 유일하게 존재하는 것을 증명할 수 있는지에 대한 논리력을 평가하고자 하였다.[수학I]의 다항식의 나눗셈에 대한 문제해결 능력의 평가를 통해 논리적이고 수리적인 분석 능력을 측정하고자 하였다. 또한 [수학II]의 수학적 귀납법을 이해하고 자연수에 대한 간단한 명제를 수학적 귀납법을 이용해서 증명할 수 있는 논리력을 평가하고자 하였다.
문제의 제시문은 문항들을 이해하기 위해 도움이 되는 내용을 담았다.

■ 문항별 해설 / 채점기준 / 예시답안

[1] 임의의 자연수 n에 대하여 $a=2^n\times 3^{2n}-1$이 17의 배수임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

<해설>
수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 논리력을 평가하고자 하였다.

<채점기준>

배점	세부 평가 기준	세부 배점
10	$n=1$일때 증명했으면	3
	$n=k$일때 가정했으면	2
	$n=k+1$일때 증명했으면	5

<예시답안>
$n=1$일 때 $a=2\times 3^2-1=17$이므로 a는 17의 배수이다.
$n=k$일 때 $a=2^k\times 3^{2k}-1=18^k-1$이 17의 배수라 가정하자.
$n=k+1$일 때 $a=2^{k+1}\times 3^{2(k+1)}-1=18^{k+1}-1=(18^k-1)(18+1)-(18^k-1)+17$이다.
그런데 $(18^k-1)(18+1)$, 18^k-1, 17 모두 17의 배수이므로 $a=2^{k+1}\times 3^{2(k+1)}-1$은 17의 배수이다.

[2] 자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때 몫 q_1, q_2와 나머지 r_1, r_2가 존재하여 $a=bq_1+r_1=bq_2+r_2$가 성립한다고 한다. 그러면 $q_1=q_2$이고 $r_1=r_2$임을 증명하시오.

<해설>
자연수에 대한 나눗셈 정리에서 몫과 나머지가 유일하게 존재하는 것을 증명할 수 있는 논리력을 평가하고자 하였다.

<채점기준>

배점	세부 평가 기준	세부 배점
10	$b(q_1-q_2)=r_2-r_1$임을 보였으면	2
	$r_2>r_1$일때 모순임을 보였으면	3
	$r_2<r_1$일때 모순임을 보였으면	3
	$q_1=q_2$임을 보였으면	2

<예시답안>
$a=bq_1+r_1=bq_2+r_2$이므로 $b(q_1-q_2)=r_2-r_1$이다.
만일 $r_2>r_1$이라면 $0<r_2-r_1<b$이므로 $b(q_1-q_2)\neq r_2-r_1$이다.
만일 $r_2<r_1$이라면 $0<r_1-r_2<b$이므로 $b(q_1-q_2)\neq r_2-r_1$이다.
따라서 $r_2=r_1$이다. 또한 $b(q_1-q_2)=0$이므로 $q_1=q_2$이다.

[3] 함수 $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$를 다음과 같이 정의하자. ($\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다.)

$a\in\mathbb{N}$에 대하여 $f(a)=k$ (k는 a와 2의 최대공약수)

(1) 함수 f가 다음 성질을 만족하는지 판정하고 이유를 설명하시오.

모든 $a,b\in\mathbb{N}$에 대하여 $f(ab)=f(a)f(b)$이다.

(2) $f(a)=1$이고 $f(b)=1$인 a와 b에 대하여 $f(ab)=f(a)f(b)$가 성립함을 증명하시오.

<해설>
최대 공약수에 대한 이해력과 문제풀이 능력을 평가하고자 하였다.

<채점기준>

배점	세부 평가 기준	세부 배점
9	(1)반례를 제시했으면	3
	(2)a와 b가 모두 홀수임을 보였으면	3
	(2)$f(ab)=1$임을 보였으면	3

<예시답안>
(1) 함수 f는 주어진 성질을 만족시키지 않는다. 반례는 다음과 같다.
$a=2,\ b=2$로 놓으면 $f(2\times2)=f(4)=2$이고 $f(2)f(2)=2\times2=4$ 이므로 $f(2\times2)\neq f(2)f(2)$이다.

(2) $f(a)=1,\ f(b)=1$이므로 a와 b는 모두 홀수이다. 따라서 ab는 홀수이고 $f(ab)=1$이다.
따라서 $f(ab)=f(a)f(b)$이다.

[4] 실수 a,b에 대하여 두 다항식을 $f(x)=ax^{2016}+bx^{523}-6,\ \ g(x)=x^2+x+1$라 놓으면 제시문 (4)에 의하여 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$를 만족하는 다항식 $q(x)$와 $r(x)$가 존재한다. $r(x)=0$일 때 ab를 구하시오.

<해설>
이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 수리적 계산력을 평가하고자 하였다.

<채점기준>

배점	세부 평가 기준	세부 배점
9	$g(x)=0$을 만족시키는 복소수를 w라 할때 $w^3-1=0$임을 보였으면	3
	$f(w)=aw^{2016}+bw^{523}-6=a+bw-6=0$임을 보였으면	4
	$ab=0$임을 보였으면	2

<예시답안>

$r(x)=0$이므로 $f(x)=g(x)q(x)$이다.

$g(x)=0$을 만족시키는 복소수를 w라 하면 $w^2+w+1=0$이므로 $w^3-1=(w-1)(w^2+w+1)=0$이다.

따라서 $f(w)=g(w)q(w)=0$이다.

그런데 $w^3=1$이므로 $f(w)=aw^{2016}+bw^{523}-6=a+bw-6=0$이다.

그러므로 $(a-6)+bw=0$이고 a와 b는 실수이고 w는 실수가 아닌 복소수이므로 $a=6, b=0$이다.

따라서 $ab=0$이다.

[5] 다항식 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=x^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{N})$에 대하여 집합 X와 집합 Y를 다음과 같이 정의하자.

$$X=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)+g(x)=0\},\quad Y=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)g(x)=0\}$$

$X=\{2,k\},\ Y=\{2,3,8\}$일 때 k를 구하시오. ($\mathbb{R}$는 모든 실수의 집합이고 $\mathbb{N}$은 모든 자연수의 집합이다.)

<해설>

나눗셈 정리와 이차방정식의 의미를 이해하고, 수리적인 계산능력을 평가하고자 하였다.

<채점기준>

배점	세부 평가 기준	세부 배점
12	$f(2)=0=g(2)$임을 보였으면	3
	$f(x)=(x-2)(x-s)$이고 $g(x)=(x-2)(x-t)$임을 보였으면	3
	$k=\dfrac{s+t}{2}$임을 보였으면	3
	$k=\dfrac{11}{2}$임을 보였으면	3

<예시답안>

$f(2)=-g(2),\ f(2)g(2)=0$이므로 $f(2)f(2)=0=g(2)g(2)$이다. 따라서 $f(2)=0=g(2)$이다.

그러므로 적당한 실수 s,t가 존재하여 $f(x)=(x-2)(x-s)$이고 $g(x)=(x-2)(x-t)$이다.

$f(x)+g(x)=0$이므로 $(x-2)(x-s)+(x-2)(x-t)=0$이고 $(x-2)(x-s+x-t)=0$이다.

그런데 $X=\{2,k\}$이므로 $k=\dfrac{s+t}{2}$이다.

한편, $f(x)g(x)=0$이므로 $(x-2)(x-s)(x-2)(x-t)=0$이고 $Y=\{2,3,8\}$이므로 $s+t=3+8=11$이다.

그러므로 $k=\dfrac{11}{2}$이다.

자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 문항 별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

(가) 어떤 구간 I에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 $f''(x)=g(x)$을 만족시키는 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$는 부정적분을 반복적으로 구하여 찾을 수 있다. 먼저, 이계도함수 $f''(x)$는 함수 $f'(x)$의 도함수, 즉 $\frac{d}{dx}f'(x)=f''(x)$이므로 부정적분의 정의에 의해 $f'(x)$는 함수 $f''(x)=g(x)$의 부정적분이다. 그리고 또한 함수 $g(x)=f''(x)$의 부정적분 $F(x)$는 다음과 같다.

$$F(x)=\int g(x)\,dx+C_0,\quad C_0\text{은 적분상수}$$

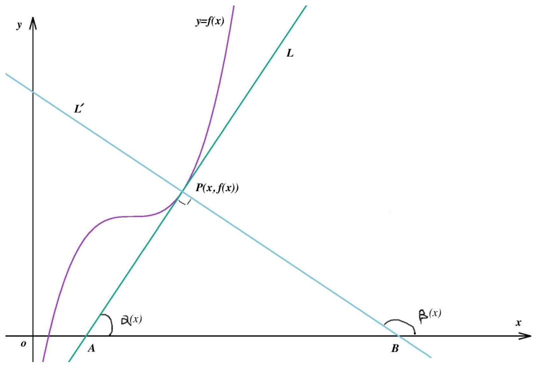
여기서 $f'(x)$와 $F(x)$의 도함수가 모두 $g(x)=f''(x)$로 같으므로 다음이 성립한다.

$$f'(x)=F(x)+C_1,\quad C_1\text{은 상수}$$

이로부터 함수 $y=f(x)$는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$f(x)=\int\left(F(x)+C_1\right)dx+C_2,\quad C_2\text{는 적분상수}$$

(나) 함수 $y=f(x)$가 구간 I에서 미분가능하다고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x,f(x))$, $x\in I$에서의 접선 L이 x축과 만나는 경우, 두 직선의 이루는 각의 크기를 양의 x축으로부터 시곗바늘이 도는 방향의 반대 방향으로 재고 $\alpha(x)$ (라디안)라 하자. 또 같은 점 $P(x,f(x))$를 지나고 직선 L에 수직인 직선 L'이 x축과 이루는 각의 크기도 같은 방법으로 재고 그 크기를 $\beta(x)$ (라디안)로 나타내기로 하자. 점 $P(x,f(x))$에서의 접선 L이 x축과 만나지 않는, 즉 평행한 경우에는 $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=\frac{\pi}{2}$로 정한다. 그러면 $0\le\alpha(x)<\pi$, $\alpha(x)\ne\frac{\pi}{2}$이고, 각 $\alpha(x)$가 예각일 경우는 $\beta(x)=\alpha(x)+\frac{\pi}{2}$이고, 각 $\alpha(x)$가 둔각이라면 $\alpha(x)=\beta(x)+\frac{\pi}{2}$의 관계가 성립한다. <그림 1>은 $\alpha(x)$가 예각인 경우의 한 예를 나타낸 것이다. (※ 함수 $y=f(x)$가 이계도함수를 가지면 함수 $\alpha(x)$는 미분가능하다고 가정한다.)



<그림 1>

[1] 제시문 (나)의 점 $P(x,f(x))$에서의 접선 L에 대하여

(1) $\alpha(x)$와 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$와의 관계식을 구하시오.(5점)

(2) $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$인 이유를 설명하시오.(2점)

[2] 함수 $y=f(x)$가 구간 I에서 미분가능하고 $f'(x) \neq 0$을 만족시킨다고 할 때, $\tan(\alpha(x)+\beta(x))$와 도함수 $f'(x)$의 관계식을 구하시오.(8점)

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 구간 I에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.(6점)

$$\frac{d\alpha(x)}{dx}=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2},\ x\in I$$

(2) 함수 $f(x)=\ln(\sec x)$, $I=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$를 구하시오.(5점)

[4] 구간 $I=(-\infty,\infty)$에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대한 다음 명제를 증명하시오.(12점)

함수 $y=f(x)$가 상수함수 또는 일차함수이면 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=0$, $x\in I$이고, 그 역도 성립한다.

[5] 함수 $f(x)=\sin x$, $I=[0,2\pi]$에 대해 $g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)$라고 할 때, $g(x)$의 값이 최대가 되는 점 $x_M\in I$와 최소가 되는 점 $x_m\in I$를 찾고, x_M과 x_m에서의 $\alpha(x)$와 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$의 값을 구하시오.(12점)

■ 출제 의도

부정적분과 도함수와의 관계, 접선의 기울기와 미분계수에 관한 제시문과 함께 주어진 몇가지 문제를 해결하는 과정에서 수학적인 분석력과 논리력, 계산력 그리고 교육과정에서 배운 여러 가지 개념과 수학적 원리 원칙에 대한 이해와 지식의 활용 및 응용능력, 그리고 문제 해결력을 평가하고자 한다.

■ 문항별 해설 / 채점기준 / 예시답안

[1] 제시문 (나)의 점 $P(x, f(x))$에서의 접선 L에 대하여

(1) $\alpha(x)$와 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$와의 관계식을 구하시오.(5점)

(2) $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$인 이유를 설명하시오.(2점)

<해설>

직선의 기울기와 직선이 x축과 이루는 각, 그리고 탄젠트 함수와 어떤 관계에 있는지를 이해하고 있고, 곡선 위의 한점에서의 미분계수가 접선의 방정식의 기울기라는 이해하고 그들의 관계에 대해 알고 관계식을 정확히 표현할 수 있는 지를 평가하고자 한다. 또한 한 점에서 미분계수가 존재(미분가능하면)하면 그에 대응하는 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 기울기가 유한해야 한다는 것이 접선이 x축과 이루는 각이 만족시켜야 하는 조건이 무엇인지 논리적으로 말할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 주장을 귀류법 등의 논증 방법을 정확히 이해하고 사용할 수 있는 능력을 평가하고자 한다.

<채점기준>

(1) 접선 L의 기울기는 접선의 x 절편을 원점으로 이동하여 얻은 직선 l의 기울기와 같다. 접선이 x축과 이루는 각의 크기가 $\alpha(x)$이므로 탄젠트 함수의 정의에 의해 직선 l의 기울기는 $\tan\alpha(x)$이다. 따라서 접선 L의 기울기는 $\tan\alpha(x)$이다. [2점]

한편, $f'(x)$는 점 P에서의 접선 L의 기울기이다. [2점]

따라서 다음이 성립한다.

$$\tan\alpha(x) = f'(x) \quad [1점]$$

(2) $\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$이면 (1)의 식에서 $\tan\alpha(x) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$이 되어 $f'(x) = \infty$이다.

이는 함수 $y=f(x)$가 점 x에서 미분가능하지 않음을 의미하여 함수 $y=f(x)$가 미분가능하다는 데 모순이다.

따라서 $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$이다. [2점]

(별해) x에서 미분가능하므로 $f'(x)$는 실수이다.

그런데 $\tan\alpha(x) = f'(x)$이고 $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$이므로 $\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$일 수 없다. [2점]

배점	세부평가기준	세부 배점
7	접선이 x축과 이루는 각의 탄젠트와 접선의 기울기와의 관계를 정확히 아는가?	2점
	미분계수와 접선의 기울기와의 관계를 아는가?	2점
	두 관계를 식으로 정확히 나타내는가?	1점
	논리적으로 명확하게 $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$인 이유를 설명하는가	2점

<예시답안>

(1) 접선의 기울기는 접선의 x 절편을 원점으로 이동하여 얻은 직선 l의 기울기와 같다. 접선이 x축과 이루는 각의 크기가 $\alpha(x)$이므로 탄젠트 함수의 정의에 의해 직선 l의 기울기는 $\tan\alpha(x)$이다. 따라서 접선의 기울기는 $\tan\alpha(x)$이다.

한편, $f'(x)$는 점 P에서의 접선의 기울기이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\tan\alpha(x) = f'(x)$$

(2) $\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$이면 (1)의 식에서 $\tan\alpha(x) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$이 되어 $f'(x) = \infty$이다.

이는 함수 $y = f(x)$가 점 x에서 미분가능하지 않음을 의미하여 함수 $y = f(x)$가 미분가능하다는 데 모순이다.

따라서 $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$이다.

(별해) x에서 미분가능하므로 $f'(x)$는 실수이다.

그런데 $\tan\alpha(x) = f'(x)$이므로 $\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$이면 탄젠트 값이 정해지지 않으므로 $\alpha(x) \neq \frac{\pi}{2}$이어야 한다.

[2] 함수 $y = f(x)$가 구간 I에서 미분가능하고 $f'(x) \neq 0$을 만족시킨다고 할 때, $\tan(\alpha(x) + \beta(x))$와 도함수 $f'(x)$의 관계식을 구하시오.(8점)

<해설>

삼각함수에 관한 여러 성질과 덧셈정리를 정확히 이해하고 그를 이용하여 제시된 문제를 수리논리적으로 정확하게 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

<채점기준>

탄젠트의 덧셈정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha(x) + \beta(x)) = \frac{\tan\alpha(x) + \tan\beta(x)}{1 - \tan\alpha(x)\tan\beta(x)} \quad \text{[2점]}$$

제시문의 (나)에 의하면 $\beta(x) = \alpha(x) + \frac{\pi}{2}$ 또는 $\alpha(x) = \beta(x) + \frac{\pi}{2}$이다.

여기서 삼각함수에 관한 성질 $\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\theta,\ \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin\theta$ (복부호 동순)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\tan\beta(x) = \tan\left(\alpha(x) \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha(x) \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha(x) \pm \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pm\cos\alpha(x)}{\mp\sin\alpha(x)} = -\cot\alpha(x) \quad \text{(복부호 동순) [2점]}$$

따라서, $\tan\alpha(x)\tan\beta(x) = \tan\alpha(x)\{-\cot\alpha(x)\} = -1$ **[2점]**

또한 문항 [1]에서 $\tan\alpha(x) = f'(x)$이고 문제의 조건에서 $f'(x) \neq 0$이므로 다음을 얻는다.

$$\tan\alpha(x) + \tan\beta(x) = \tan\alpha(x) - \cot\alpha(x) = f'(x) - \frac{1}{f'(x)} \quad \text{[1점]}$$

그러므로 구하는 식은 다음과 같다.

$$\tan(\alpha(x) + \beta(x)) = \frac{\tan\alpha(x) + \tan\beta(x)}{1 - \tan\alpha(x)\tan\beta(x)} = \frac{f'(x) - \frac{1}{f'(x)}}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{\{f'(x)\}^2 - 1}{2f'(x)},\ f'(x) \neq 0$$

[1점]

배점	세부평가기준	세부 배점
8	탄젠트의 덧셈정리를 알고 바르게 표현하는가?	2점
	$\tan\beta(x)$와 $\tan\alpha(x)$의 관계를 바르게 표현하는가?	2점
	탄젠트 덧셈정리의 분자를 바르게 표현하는가?	2점
	탄젠트 덧셈정리의 분모를 바르게 표현하는가?	1점
	$\tan(\alpha(x)+\beta(x))$를 $f'(x)$로 바르게 표현하는가?	1점

<예시답안>

탄젠트의 덧셈정리에 의해 다음이 성립한다.

또한 문항 [1]에서 $\tan\alpha(x)=f'(x)$이고 문제의 조건에서 $f'(x)\neq 0$이므로 다음을 얻는다.

$$\tan\alpha(x)+\tan\beta(x)=\tan\alpha(x)-\cot\alpha(x)=f'(x)-\frac{1}{f'(x)}$$

그러므로 구하는 식은 다음과 같다,

$$\tan(\alpha(x)+\beta(x))=\frac{\tan\alpha(x)+\tan\beta(x)}{1-\tan\alpha(x)\tan\beta(x)}=\frac{f'(x)-\dfrac{1}{f'(x)}}{1-(-1)}$$

$$=\frac{\{f'(x)\}^2-1}{2f'(x)},\ f'(x)\neq 0$$

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 구간 I에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.(6점)

$$\frac{d\alpha(x)}{dx}=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2},\ x\in I$$

(2) 함수 $f(x)=\ln(\sec x)$, $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$를 구하시오.(5점)

<해설>

이미 얻은 결과로부터 새로운 결과를 얻어내는 과정에서 필요한 여러 가지 미분법을 정확하게 알고 사용할 수 있는 능력과 그 과정에서 삼각함수의 여러 성질, 로그함수의 도함수, 삼각함수의 도함수를 다양한 수학적 상황에서 바르게 적용하여 요구한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

<채점기준>

(1) 문항 [1]에서 얻은 관계식 $\tan\alpha(x)=f'(x)$의 양변을 변수 x에 관해 미분한다.

$$\frac{d}{dx}(\tan\alpha(x))=\frac{d}{dx}f'(x)$$

좌변을 합성함수의 미분법과 $(\tan\theta)'=\sec^2\theta$ 을 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\sec^2\alpha(x)\frac{d}{dx}\alpha(x)=f''(x) \text{ 또는 } \frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{\sec^2\alpha(x)}$$ [3점]

그런데 삼각함수에 관한 성질 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$과 $\tan\alpha(x)=f'(x)$임을 이용하면

$\sec^2\alpha(x)=1+\tan^2\alpha(x)=1+\{f'(x)\}^2$ 이다. [2점]

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2},\ x\in I$$ [1점]

(2) $f(x)=\ln(\sec x)=\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\ln(\cos x)^{-1}=-\ln(\cos x)$이므로

$$f'(x)=-\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=\tan x,\quad f''(x)=(\tan x)'=\sec^2 x \quad \text{[3점]}$$

이들을 (1)의 식에 대입하고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$을 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=\frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}=1 \quad \text{[2점]}$$

배점	세부평가기준	세부 배점
11	합성함수의 미분을 정확히 사용하여 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{\sec^2\alpha(x)}$ 관계를 얻는가?	3점
	$\sec^2\alpha(x)=1+\tan^2\alpha(x)=1+\{f'(x)\}^2$ 임을 바르게 얻는가?	2점
	문제에서 요구하는 식을 얻는가?	1점
	주어진 함수의 도함수와 이계도함수를 바르게 얻는가?	3점
	최종적으로 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=1$을 바르게 얻는가?	2점

<예시답안>

(1) 문항 [1]에서 얻은 관계식 $\tan\alpha(x)=f'(x)$의 양변을 변수 x에 관해 미분한다.

$$\frac{d}{dx}(\tan\alpha(x))=\frac{d}{dx}f'(x)$$

좌변을 합성함수의 미분법과 $(\tan\theta)'=\sec^2\theta$ 을 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\sec^2\alpha(x)\frac{d}{dx}\alpha(x)=f''(x) \text{ 또는 } \frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{\sec^2\alpha(x)}$$

그런데 삼각함수에 관한 성질 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$과 $\tan\alpha(x)=f'(x)$임을 이용하면

$$\sec^2\alpha(x)=1+\tan^2\alpha(x)=1+\{f'(x)\}^2$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2},\quad x\in I$$

(2) $f(x)=\ln(\sec x)=\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\ln(\cos x)^{-1}=-\ln(\cos x)$이므로

$$f'(x)=-\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=\tan x,\quad f''(x)=(\tan x)'=\sec^2 x$$

이들을 (1)의 식에 대입하고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$을 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=\frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}=1$$

[4] 구간 $I=(-\infty,\infty)$에서 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대한 다음 명제를 증명하시오.(12점)

함수 $y=f(x)$가 상수함수 또는 일차함수이면 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$이고, 그 역도 성립한다.

<해설>

명제의 증명 방법을 이해하고 제시된 문제에 적용하여 바르게 활용할 수 있는지 평가한다. 그 과정에서 미분과 부정적분의 개념을 정확하게 이해하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력도 평가한다.

<채점기준>

먼저, 구간 $I=(-\infty,\infty)$에서 함수 $y=f(x)$가 일차함수 또는 상수함수라 하자.

그러면 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)이므로 분명히 $f''(x)=0, x\in I$이다. [3점]

따라서 문항 [3]의 (1)에서 얻은 식에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I \quad \text{[2점]}$$

이제, 역을 증명하기 위해 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$ 라고 하자.

그러면 문항 [3]의 (1)의 식 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=0,\ x\in I$에 의하여 $f''(x)=0,\ x\in I$이다. [2점]

한편, 상수함수의 도함수는 0이므로 제시문의 (가)에 의해 $F(x)=f'(x)=C_1$ (C_1은 상수)이다.

또한 제시문의 (가)로부터 다음을 얻는다.

$$f(x)=\int C_1dx+C_2=C_1x+C_2, \quad (C_1,\ C_2\text{는 상수}) \ \text{[4점]}$$

따라서 $y=f(x)$는 일차함수 또는 상수함수이다. [1점]

배점	세부평가기준	세부 배점
12	일차함수 또는 상수함수의 표현을 정확히 알고 그의 이계도함수가 0임을 아는가?	3점
	$\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$이 성립함을 바르게 밝히는가?	2점
	$\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$에서 $f''(x)=0$임을 얻는가?	2점
	$f''(x)=0$에서 $y=f(x)$는 일차함수 또는 상수함수임을 바르게 밝히는가?	5점

<예시답안>

먼저, 구간 $I=(-\infty,\infty)$에서 함수 $y=f(x)$가 일차함수 또는 상수함수라 하자.

그러면 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)이므로 분명히 $f''(x)=0, x\in I$이다.

따라서 문항 [3]의 (1)에서 얻은 식에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$$

이제, 역을 증명하기 위해 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=0,\ x\in I$라고 하자.

그러면 문항 [3]의 (1)의 식 $\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=0,\ x\in I$에 의하여 $f''(x)=0,\ x\in I$이다.

한편, 상수함수의 도함수는 0이므로 제시문의 (가)에 의해 $F(x)=f'(x)=C_1$ (C_1은 상수)이다.

또한 제시문의 (가)로부터 다음을 얻는다.

$$f(x)=\int C_1dx+C_2=C_1x+C_2, \ (C_1,\ C_2\text{는 상수})$$

따라서 $y=f(x)$는 일차함수 또는 상수함수이다.

[5] 함수 $f(x)=\sin x,\ I=[0,2\pi]$에 대해 $g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)$라고 할 때, $g(x)$의 값이 최대가 되는 점 $x_M\in I$와 최소가 되는 점 $x_m\in I$를 찾고, x_M과 x_m에서의 $\alpha(x)$와 $\frac{d}{dx}\alpha(x)$의 값을 구하시오.(12점)

<해설>

주어진 문제를 교육과정을 통해 배운 수학적 지식을 문제 해결을 위한 맥락과 상황에 맞게 올바르게 적용하여 해결할 수 있는 능력을 평가한다. 구체적으로는 함수의 최대 최소의 문제를 교과과정에서 제시한 방법에 따라 정확히 해결하는 능력을 평가한다.

<채점기준>

함수 $f(x)=\sin x$, $I=[0,2\pi]$에 대해 $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$이므로 다음을 얻는다. [1점]

$$g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x},\ I=[0,2\pi]\quad [1점]$$

함수 $g(x)$의 극값을 구하기 위해 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$을 이용하여 $g(x)$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$g'(x)=-\frac{\cos x(1+\cos^2 x)-\sin x(-2\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}=-\frac{\cos x\ (2+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}$$

따라서 $\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$에서 $g'(x)=0$이다. [4점]

이제 구간 $I=[0,2\pi]$에서 $g'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소,
그리고 찾고자 하는 값들을 표로 나타내면 다음과 같다. [3점]
여기서 $\alpha(x)$의 값을 구하기 위해 $\tan\alpha(x)=f'(x)=\cos x$를 이용한다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)$
$f'(x)$	1		0		0		1	$f'(x)=\cos x$
$\alpha(x)$	$\frac{\pi}{4}$		0		0		$\frac{\pi}{4}$	$\tan\alpha(x)=f'(x)$
			x_m		x_M			

그러므로 $x_M=\frac{3\pi}{2}$, $x_m=\frac{\pi}{2}$이고 $\alpha(x_M)=\alpha(x_m)=0$이며 $\frac{d}{dx}\alpha(x_M)=1$, $\frac{d}{dx}\alpha(x_m)=-1$이다. [3점]

배점	세부평가기준	세부 배점
12	주어진 함수의 도함수와 이계도함수를 바르게 얻는가?	1점
	$g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)$를 바르게 얻는가?	1점
	방정식 $g'(x)=0$과 그 근을 바르게 찾는가?	4점
	요구한 답을 얻기 위한 함수 $g(x)$ 증감표 또는 그에 상당하는 것을 바르게 얻는가?	3점
	문제에서 요구한 것에 바르게 답하는가?	3점

<예시답안>

함수 $f(x)=\sin x$, $I=[0,2\pi]$에 대해 $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$이므로 다음을 얻는다.

$$g(x)=\frac{d}{dx}\alpha(x)=\frac{f''(x)}{1+\{f'(x)\}^2}=-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x},\ I=[0,2\pi]$$

함수 $g(x)$의 극값을 구하기 위해 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$을 이용하여 $g(x)$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$g'(x)=-\frac{\cos x(1+\cos^2 x)-\sin x(-2\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}=-\frac{\cos x\ (2+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}$$

따라서 $\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$에서 $g'(x)=0$이다.

이제 구간 $I=[0,2\pi]$에서 $g'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소, 그리고 찾고자 하는 값들을 표로 나타내면

다음과 같다. 여기서 $\alpha(x)$의 값을 구하기 위해 $\tan\alpha(x) = f'(x) = \cos x$를 이용한다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$g(x) = \frac{d}{dx}\alpha(x)$
$f'(x)$	1		0		0		1	$f'(x) = \cos x$
$\alpha(x)$	$\frac{\pi}{4}$		0		0		$\frac{\pi}{4}$	$\tan\alpha(x) = f'(x)$
			x_m		x_M			

그러므로 $x_M = \frac{3\pi}{2}$, $x_m = \frac{\pi}{2}$이고 $\alpha(x_M) = \alpha(x_m) = 0$이며 $\frac{d}{dx}\alpha(x_M) = 1$, $\frac{d}{dx}\alpha(x_m) = -1$이다.