# 2021학년도 논술 모의평가
# 자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는
   $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$

2. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 $x$에 대하여
   (i) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
   (ii) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

3. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
   (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
   (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

4. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

[1] 모든 실수 $x$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos(\sin x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 $2\pi$보다 작은 양수 $p$를 구하시오. [6점]

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 가장 작은 양수 $a$를 구하시오. [8점]

(3) $x>0$에서 함수 $f(x)$가 극솟값이 되는 $x$를 작은 값부터 차례로 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\cdots$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{x_k x_{k+1}}$의 값을 구하시오. [8점]

[2] 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a^2, & |x|>a \\ \sqrt{a-|x|}, & |x|\le a \end{cases} \quad (\text{단, } a>0)$$

(1) 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않을 때, $t$의 값을 구하고 그 이유를 밝히시오. [10점]

(2) 함수 $y=x+1$과 함수 $y=f(x)$의 교점이 개수가 4개가 되도록 $a$의 범위를 구하시오. [8점]

(3) 실수 $x$, $y$가 $|x|<a$이고 $0\le y\le f(x)$를 만족할 때, $\frac{y-\sqrt{a}}{x-a}$의 값의 범위를 구하시오. [10점]

## ■ 출제 의도

[1] (1) 삼각함수에 대한 기본적인 성질의 활용 능력을 평가한다.
(2) 합성함수의 도함수 유도능력과 삼각 방정식 풀이 능력을 통해 극값 결정 능력을 평가한다.
(3) 극대 극소를 판정하는 능력과 계산 능력을 평가한다.

[2] (1) 미분가능성 개념을 이해하고 적용하는 능력을 평가한다.
(2) 구간에 따라 나누어진 함수의 전체 모습의 이해능력과 계산 능력을 평가한다.
(3) 주어진 조건의 이해 능력과 활용 능력을 평가한다.

## ■ 문항 해설

미적분학은 모든 공학과 자연과학의 기초를 이루는 이론으로서 그 뛰어난 유용성으로 많은 분야에 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념 체계들 중 하나이다. 삼각함수, 다항식 무리식 등은 가장 기본적인 함수의 형태이며 많은 응용성으로 인해 반드시 이해되어야할 수학적 대상이다. 문항들은 이러한 개념들을 이해하고 제시문을 활용한다면 다음과 같은 간단한 과정을 통해 해결할 수 있다.

[1] (1) 삼각함수의 대칭성과 평행이동에 관한 성질을 수식으로 표현하여 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 합성함수 미분법을 활용하여 얻어진 삼각 방정식을 풀어 극값 판정을 하면 해결할 수 있는 문항이다.
(3) 극소 판정과 함수의 주기성을 이용하여 일반항으로 표현하고 계산을 통해 해결할 수 있는 문항이다.

[2] (1) 좌우미분계수를 비교하여 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 구간에 따라 나누어진 함수의 전체 모습을 구성하여 해결할 수 있는 문항이다.
(3) 조건을 만족하는 영역을 이해하고 요구되는 식을 직선으로 해석하여 해결할 수 있는 문항이다.

## ■ 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 1-1 | 삼각함수의 대칭성을 활용하면 | 2 |
| | $f(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)$을 얻으면 | 4 |
| 1-2 | $f'(x)=-\sin(\sin x)\cos x=0$을 얻으면 | 2 |
| | 가장 작은 양수가 $\frac{\pi}{2}$임을 보이면 | 4 |
| | $x=\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 가짐을 보이면 | 2 |
| 1-3 | $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ ($n$은 정수)에서 함수 $f(x)$는 모두 극솟값을 가짐을 보이면 | 3 |
| | $x_k=\frac{2k-1}{2}\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$임을 보이면 | 2 |
| | $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{x_k x_{k+1}}=1$임을 보이면 | 3 |
| 2-1 | $x=-a$의 경우, 우미분계수가 존재하지 않음을 보이면 | 3 |
| | $x=0$의 경우, 좌미분계수와 우미분계수가 실제 계산으로 일치하지 않음을 보이면 | 4 |
| | $x=a$의 경우, 좌미분계수가 존재하지 않음을 보이면 | 3 |
| 2-2 | 직선 $y=x+1$가 점 $(-a,\ 0)$를 지나는 경우, $a=1$임을 보이면 | 3 |
| | 직선 $y=x+1$가 $y=\sqrt{x+a}$와 접하는 경우, $a=\frac{3}{4}$임을 보이면 | 3 |
| | $\frac{3}{4}<a<1$임을 보이면 | 2 |
| 2-3 | $\frac{y-\sqrt{a}}{x-a}=t$라고 하면 $y=t(x-a)+\sqrt{a}$이다.<br>이것이 기울기 $t$에 관계없이 점 $(a,\sqrt{a})$를 지나는 직선임을 얻으면 | 3 |
| | 직선이 점 $(0,\sqrt{a})$을 지나는 경우, $t=0$을 보이면 | 2 |
| | 직선이 점$(a,0)$을 지날 수는 없으므로 그 점에 가까워지는 경우,<br>기울기 $t$가 한없이 커짐을 설명하면 | 3 |
| | $0\le\frac{y-\sqrt{a}}{x-a}$임을 보이면 | 2 |

## ■ 예시 답안

[1]

(1) 함수 $y=\sin x$는 주기가 $2\pi$이며 원점 대칭이므로 $\sin(-x)=-\sin x$이다.
함수 $y=\cos x$는 $y$축 대칭이므로 $\cos(\sin(-x))=\cos(\sin x)$이다.
이 사실들로부터 $f(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)$을 얻는다.
따라서 $p=\pi$이다.

(2) 삼각함수는 모든 실수에서 미분가능하므로 제시문 1의 합성함수 미분법으로부터 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.
$f'(x)=-\sin(\sin x)\cos x=0$로부터 $\sin(\sin x)=0$ 혹은 $\cos x=0$이다.
$\sin(\sin x)=0$로부터 $\sin x=n\pi$ ($n$은 정수)이다. 그런데 $|\sin x|\le 1$이므로 $\sin x=0$이다.
이로부터 $x=n\pi$을 얻는다. …… ①
한편, $\cos x=0$으로부터 $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ ($n$은 정수)을 얻는다. …… ②
①, ②로부터 가장 작은 양수는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.
또한 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)<0$이고 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)>0$ ($h$은 작은 양수)이므로 제시문 3에 의해 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 가진다.

(3) $f'(-h)>0$이고 $f'(h)<0$ ($h$은 작은 양수)이므로 제시문 3에 의해 $x=0$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 가진다. 또한 (1)에서 $f(x+\pi)=f(x)$이므로 $x=n\pi$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 가진다.
한편, (2)로부터 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$는 극솟값이며 함수 $f(x)$의 주기성으로부터 $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ ($n$은 정수)에서 함수 $f(x)$는 모두 극솟값을 가진다.
이로부터 $f(x)$가 극솟값이 되는 양수 $x$를 작은 값부터 정리하면
$x_k=\dfrac{2k-1}{2}\pi$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)이다.
$\dfrac{\pi^2}{x_kx_{k+1}}=\dfrac{4}{(2k-1)(2k+1)}=2\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$이므로
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{x_kx_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=1$이다.

[2]

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-a^2, & x<-a \\ \sqrt{x+a}, & -a\le x<0 \\ \sqrt{a-x}, & 0\le x\le a \\ x^2-a^2, & a<x \end{cases}$ 이다.

함수 $f(x)$는 경계점을 제외한 각 구간 안에서 미분가능하므로 경계점에서 좌우미분계수를 조사한다.
(i) $x=-a$의 경우
우미분계수는 $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{-a+h+a}-\sqrt{-a+a}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$이므로 제시문 4에 의해 미분가능하지 않다.
(ii) $x=0$의 경우

좌미분계수는 $\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h+a}-\sqrt{0+a}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{1}{\sqrt{h+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$이고

우미분계수는 $\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{a-h}-\sqrt{a-0}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-1}{\sqrt{a-h}+\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a}}$이므로 값이 일치하지 않아 제시문 4에 의해 미분가능하지 않다.

(iii) $x=a$의 경우

좌미분계수는 $\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{a-a-h}-\sqrt{a-a}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-1}{\sqrt{-h}}=-\infty$이므로 제시문 4에 의해 미분가능하지 않다.

따라서 (i), (ii), (iii)으로부터 $x=-a,\ 0,\ a$에서 미분가능하지 않다.

(2)

$y=x+1$과 $y=f(x)$의 교점 개수가 4개가 되기 위해서는 직선이 다음 두 가지 경우의 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=x+1$가 $(-a,\ 0)$를 지나는 경우

대입하면 $a=1$이다.

(ii) 직선 $y=x+1$가 $y=\sqrt{x+a}$와 접하는 경우

$y$를 소거한 식 $x^2+x+1-a=0$이 중근을 가져야하므로 $D=1-4(1-a)=0$, $a=\frac{3}{4}$이다.

따라서 (i), (ii)로부터 $\frac{3}{4}<a<1$이다.

(3)

$\frac{y-\sqrt{a}}{x-a}=t$라고 하면 $y=t(x-a)+\sqrt{a}\cdots\cdots$ ①이다.

이것은 기울기 $t$에 관계없이 점 $(a,\sqrt{a})$를 지나는 직선이다.

점 $(a,\sqrt{a})$을 지나면서 $(x,y)$가 위치하는 영역과 만날 수 있는 직선은 점 $(0,\sqrt{a})$을 지나는 경우를 포함하고 점 $(a,0)$을 지나는 경우를 제외한 그 사이에 위치한다.

(i) 직선 ①이 점 $(0,\sqrt{a})$을 지나는 경우,

①에 대입하면 $t=0$이다.

(ii) 직선 ①이 점 $(a,0)$을 지날 수는 없으므로 그 점에 가까워지는 경우

직선 ①의 $x$절편이 $a$로 가까워질수록 기울기 $t$는 한없이 커진다.

따라서 (i), (ii)로부터 $0\le\frac{y-\sqrt{a}}{x-a}$이다.