2021학년도 신입학 수시모집

논술고사 문제지 (자연계열-1교시)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 좌표평면 위에서 속도와 속도의 크기

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 (x, y)가 $x = f(t), y = g(t)$로 나타내어질 때, 점 P의 속도와 속도의 크기는 다음과 같다.

속도: $(f'(t), g'(t))$, 　　속도의 크기: $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$

2. 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 실수 k에 대하여 다음을 만족하는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$$f(c) = k$$

[1] 직선 $ax + 2y + 4 = 0$이 직선 $2bx - 5y + 10 = 0$과 수직이고 직선 $(b+1)x + 2y - 7 = 0$과 평행일 때, 물음에 답하시오. (단, a, b는 실수)

(1) $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [6점]

(2) 두 직선 $ax + 2y + 4 = 0$, $2bx - 5y + 10 = 0$과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하시오. [7점]

[2] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x = \frac{\cos t}{t}, \quad y = \frac{\sin t}{t} \qquad (t \geq \pi)$$

이다. 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t) = (v_x, v_y)$, 속도의 크기를 $w(t)$라 할 때, 물음에 답하시오.

(1) $v(t)$와 $w(t)$를 구하시오. [6점]

(2) $\lim_{t \to \infty} t^n w(t)$가 수렴하도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. [5점]

(3) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면, 점 Q는 x축 위를 움직이는 직선 운동을 한다. 이때 시각 $t = \pi$에서 $t = 3\pi$까지 점 Q가 움직이는 방향을 최소한 2번 바꿈을 보이시오. [9점]

[3] 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근 ω가 다음 식을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, a, b는 실수)

$$\frac{\omega}{3 + \omega} = a + b\omega$$

(1) 주어진 식을 만족하는 a, b의 값을 구하시오. [7점]

(2) 집합 $A = \{1, a, b\}$에서 두 원소를 선택하여 그 합을 확률변수 X라 할 때 X의 확률분포를 표로 나타내고, 기댓값 $E(X)$를 구하시오. (단, 선택은 중복을 허용한다.) [10점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수의 극대와 극소의 판정

함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

2. 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

3. 변곡점의 판정

연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

4. 치환적분법을 이용한 정적분

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

5. 부분적분법을 이용한 정적분

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[1] a는 실수이고 $0 \le x \le 1$에서 함수 $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - a$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, 물음에 답하시오.

(1) 함수 $g(a)$를 구하시오. [10점]

(2) 함수 $g(a)$의 최솟값을 구하시오. [8점]

<다음 장 계속>

[2] 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에 대하여 물음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 점 $(b, f(b))$일 때, 상수 a, b를 구하시오. [6점]

(2) 다음 이차방정식의 근을 구하시오. (단, a, b는 (1)에서 구한 상수) [6점]

$$\left(\int_1^b f(t)\,dt\right)x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\int_a^b \frac{f(t)}{\ln t}\,dt=0$$

(3) 함수 $f(x)$를 이용하여 $\log_2 3$과 $\sqrt{1.5}$의 대소를 비교하시오. [11점]

(4) $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $a_n=\displaystyle\int_{e^{\frac{1}{1-n}}}^{1}|x^{-n}\ln x|\,dx$일 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{2021}\sqrt{a_n\,a_{n+1}}$을 구하시오. [9점]

<끝>

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-1교시1번]

출제 의도

[1] 두 직선의 수직과 평행을 이해하고, 조건을 만족하는 방정식을 구하여 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[2] 좌표평면에서 움직이는 물체의 속도와 속도의 크기를 이해하고 이를 통해 응용 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

[3] 복소수의 성질을 이용하여 방정식을 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다. 그리고, 확률변수와 확률분포를 이해하고 주어진 문제의 기댓값을 구하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
	성취기준	[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 2 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 2 여러 가지 미분법 3 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

문항 [2](3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식 [중학교 1~3학년] - (2) 문자와 식 - 4 일차부등식과 연립일차방정식
	성취기준	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [9수02-11] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포
	성취기준	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판(주)	2020	41, 118, 129
	수학 Ⅱ	류희찬 외	㈜천재교과서	2020	34, 98
	미적분	이준열 외	㈜천재교육	2020	76, 83, 122
	확률과 통계	고성은 외	㈜좋은책신사고	2020	79, 84
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 두 직선의 평행 조건과 수직 조건에 대한 이해를 바탕으로 연립방정식을 도출하여 해결할 수 있다.
(2) 한 선분을 지름으로 하는 원의 성질에 대한 이해를 바탕으로 해결할 수 있다.
또는 (1)에서 구한 수직 조건으로부터 얻은 함수의 최댓값을 구함으로서 해결할 수 있다.
[2] (1) 주어진 함수의 도함수를 차례로 계산하여 속도와, 속도의 크기를 구하는 문항이다.
(2) 함수의 극한에 대한 성질을 적용하여 각 자연수에 대한 극한값을 구하여 해결할 수 있다.
(3) 주어진 상황에서 연속함수의 사잇값정리를 적용하여 문제를 해결하는 문항이다.
[3] (1) 인수분해를 통해 얻은 방정식과 복소수의 성질을 이용하여 해결할 수 있다.
(2) 확률변수와 확률을 구하고 이를 표로 나타낸 다음 기댓값을 계산하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	수직과 평행의 조건으로부터 a, b에 대한 연립방정식을 구하였으면	4
	a^2+b^2를 정확히 구했으면	2
[1](2)	두 직선의 교점이 원에 놓여 있음을 잘 기술하였으면	4
	넓이의 최댓값을 정확히 구하였으면	3
[2](1)	$v(t)$를 정확히 구하였으면	3
	$w(t)$를 정확히 구하였으면	3
[2](2)	각각의 자연수를 대입하여 극한을 구하였으면	3
	구하는 값을 정확히 도출하였으면	2
[2](3)	사잇값정리를 적용하였으면	3
	$t=\pi$에서 $t=2\pi$ 사이에서 방향이 바뀌는 것을 보였으면	3
	$t=2\pi$에서 $t=3\pi$ 사이에서 방향이 바뀌는 것을 보였으면	3
[3](1)	a, b가 만족하는 연립방정식을 정확히 유도하였으면	5
	a, b를 각각 정확히 구하였으면	2
[3](2)	확률변수를 정확히 구하였으면	3
	확률을 구하여 확률분포를 정확히 표로 나타내었으면	4
	기댓값을 정확히 구했으면	3

예시 답안

[1]

(1) $ax+2y+4=0$ …… ①

$2bx-5y+10=0$ …… ②

$(b+1)x+2y-7=0$ …… ③

①⊥②이므로 다음을 얻는다.

$a\cdot(2b)+2\cdot(-5)=0$, 즉 $ab=5$

①//③이므로 다음을 얻는다.

$\frac{a}{2}=\frac{b+1}{2}$, 즉 $a-b=1$

따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(1)^2+2\cdot5=11$

(2) 직선 $ax+2y+4=0$은 a의 값에 관계없이 점 $A(0,-2)$를 지나고, 직선 $2bx-5y+10=0$은 b의 값에 관계없이 점 $B(0,2)$를 지난다.

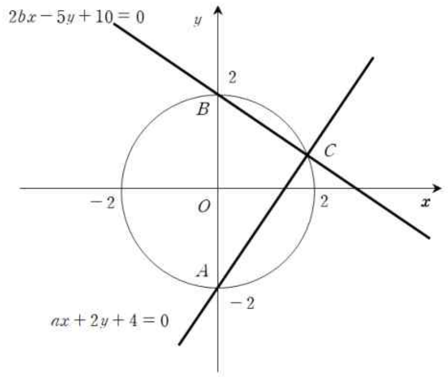
그리고 두 직선이 서로 수직으로 만나므로 두 직선의 교점은 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 놓인다.

두 직선의 교점을 C라 하면 삼각형 ABC는 문제에서 주어진 삼각형이 된다.

$\overline{AB}$를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 교점 C로부터 $\overline{AB}$까지, 즉 y축까지의 거리로 결정된다.

교점 C의 좌표가 $(2,0)$일 때 $\overline{AB}$의 길이가 최대가 되고, 따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$$



[2]

(1) $v_x=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-t\sin t-\cos t}{t^2}$, $v_y=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}$…… ①

속도는 $v(t)=\left(\dfrac{-\sin t}{t}-\dfrac{\cos t}{t^2},\ \dfrac{\cos t}{t}-\dfrac{\sin t}{t^2}\right)$

$$w(t)^2=v_x^2+v_y^2=\frac{t^2\sin^2 t+\cos^2 t+2t\sin t\cos t}{t^4}+\frac{t^2\cos^2 t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t}{t^4}$$

$$=\frac{t^2+1}{t^4}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}$$

속도의 크기는 $w(t)=\dfrac{1}{t}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}$

(2) $n=1$일 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^n w(t)=\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=1$

$n=k\ (k\geq 2)$일 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^n w(t)=\lim_{t\to\infty}t^{k-1}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\infty$

그러므로 구하는 자연수 $n=1$

(3) 시각 t에서의 점 Q의 속도를 $u(t)$라 하면 식 ①로부터 $u(t)=v_x=\dfrac{-\sin t}{t}-\dfrac{\cos t}{t^2}$이고

$u(t)$는 $t\geq\pi$에서 연속함수이다.

$u(\pi)=\dfrac{1}{\pi^2}>0$이고 $u(2\pi)=-\dfrac{1}{4\pi^2}<0$이므로 사잇값의 정리로부터 운동 방향이 바뀌는 $u(t_1)=0$인 시각 t_1이 π와 2π사이에 존재한다.

또 $u(3\pi)=\dfrac{1}{9\pi^2}>0$이므로 사잇값의 정리로부터 운동 방향이 바뀌는 $u(t_2)=0$인 시각 t_2가 2π와 3π 사이에 존재한다.

그러므로 시각 $t=\pi$에서 $t=3\pi$까지 점 Q는 움직이는 방향을 최소한 2번 바꾼다.

[3]

(1) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로 ω 는 다음을 만족한다.

$\omega^2+\omega+1=0$ ⋯⋯ ①

주어진 식의 양변에 $3+\omega$ 를 곱해 정리하면

$\omega=(a+b\omega)(3+\omega)$

$=3a+(a+3b)\omega+b\omega^2$

$b\omega^2+(a+3b-1)\omega+3a=0$ ⋯⋯ ②

식 ①을 식 ②에 대입하고 정리하면

$b(-\omega-1)+(a+3b-1)\omega+3a=(a+2b-1)\omega+3a-b=0$

ω 가 허근이므로

$a+2b=1, \qquad 3a-b=0$

위의 연립방정식을 풀면 $a=\frac{1}{7},\ b=\frac{3}{7}$ 이다.

(2) 확률변수 X가 취하는 값을 구해보면 다음과 같다.

$1+1=2,\ 1+a=\frac{8}{7},\ 1+b=\frac{10}{7},\ a+a=\frac{2}{7},\ a+b=\frac{4}{7},\ b+b=\frac{6}{7}$

선택할 수 있는 경우는 모두 9가지이고, 두 원소가 동일한 경우는 한 번, 서로 다른 두 원소는 두 번씩 선택되므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{10}{7}$	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

이로부터 확률변수 X의 기댓값은 다음과 같다.

$$E(X)=\left(2+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\right)\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{7}+\frac{10}{7}+\frac{4}{7}\right)\frac{2}{9}$$
$$=\frac{22}{63}+\frac{44}{63}=\frac{66}{63}=\frac{22}{21}$$

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-1교시2번]

출제 의도

[1] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 함수의 그래프의 개형을 이용하여 함수의 최솟값을 계산하는 능력을 평가한다

[2] 함수의 극값과 변곡점을 구하는 과정의 판단과 이와 연관된 적분과 이차방정식의 계산 능력을 판단한다. 함수를 이용하여 대소를 비교할 수 있는 응용 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학Ⅱ]-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수--$\boxed{1}$ 지수와 로그
	성취기준	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
제시문3	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-$\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문4	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문5	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항 [2-(1)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [2](3)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문항 [2](4)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-1 여러 가지 적분법 [수학 I] - (3) 수열 - 2 수열의 합
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식 외	동아출판(주)	2020	28,127
	수학 II	류희찬 외	㈜천재교과서	2020	83, 92
	미적분	이준열 외	㈜천재교육	2020	61, 112, 118, 147, 155,
기타					

문항 해설

로그함수, 미분, 적분 등의 개념은 넓은 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념들이다. 이러한 개념들을 이해하고 다음과 같은 과정을 통해 해결할 수 있는 문항이다.

[1] (1) 주어진 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하여 함수 $g(a)$를 구하는 문항이다.
(2) 함수의 그래프의 개형을 이용하여 함수의 최솟값을 구하는 문항이다.

[2] (1) 주어진 함수의 도함수를 차례로 계산하고 극값, 변곡점의 판정을 적용하여 해결할 수 있다.
(2) 치환적분법을 이용하여 이차방정식의 계수를 계산하고 이차방정식의 근을 구할 수 있는 문항이다.
(3) 로그의 성질을 사용하여 대소 비교 가능한 형태로 바꾼 다음 주어진 함수의 그래프 개형을 이용하여 해결할 수 있다.
(4) 부분적분법을 이용하여 적분을 계산하고 수열의 유한 합을 구해서 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	$a \le 0$일 때 $g(a) = -a$를 구했으면	3
	$0 < a < 1$일 때 $g(a) = \frac{a^3}{2} - a$를 구했으면	4
	$a \ge 1$일 때 $g(a) = \frac{a}{2} - 1$을 구했으면	3

하위 문항	채점 기준	배점
[1](2)	함수 $g(a)$는 $0 \le a \le 1$에서 최솟값을 가진다는 것을 설명했으면	2
	함수가 최솟값을 가지는 점 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 을 구했으면	4
	최솟값 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 을 구했으면	2
[2](1)	$f'(x)=0$에서 $x=e$을 구하고 극대임을 설명했으면	3
	$f''(x)=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$을 구하고 변곡점임을 설명했으면	3
[2](2)	$\int_1^b f(t)\,dt=\int_1^{e^{\frac{3}{2}}}\frac{\ln t}{t}\,dt=\int_0^{\frac{3}{2}} s\,ds=\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{8}$을 구했으면	2
	$\int_a^b \frac{f(t)}{\ln t}\,dt=\int_e^{e^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{t}\,dt=[\ln\lvert t\rvert]_e^{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$	2
	이차방정식의 근은 $x=-\frac{5}{9},\ 1$	2
[2](3)	$\log_2 3-\sqrt{1.5}=\frac{\ln 3}{\ln 2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$을 구했으면	3
	$\frac{\ln 3}{\ln 2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\ln 2}\left(\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$을 구했으면	4
	$\sqrt{2}<\sqrt{3}<e$이므로 증감표에 의해 $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})>0$을 구했으면	4
[2](4)	닫힌구간 $\left[e^{\frac{1}{1-n}},\ 1\right]$에서 $x^{-n}\ln x<0$을 보였으면	2
	$a_n=\int_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 \lvert x^{-n}\ln x\rvert\,dx=\frac{1}{(n-1)^2}$ 을 보였으면	4
	$\sum_{n=2}^{2021}\sqrt{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=2}^{2021}\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{n=2}^{2021}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2020}{2021}$ 을 보였으면	3

예시 답안

[1]

(1) $f'(x) = -3x^2 + 3ax = -3x(x-a)$

(ⅰ) $a \le 0$ 이면 $0 \le x \le 1$ 에서 $f'(x) \le 0$ 이다. 따라서 $g(a) = f(0) = -a$ 이다.

(ⅱ) $0 < a < 1$ 이면

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-a$	↗	극대	↘	$\frac{a}{2}-1$

따라서 $g(a) = f(a) = \frac{a^3}{2} - a$ 이다.

(ⅲ) $a \ge 1$ 이면 $0 \le x \le 1$ 에서 $f'(x) \ge 0$ 이다. 따라서 $g(a) = f(1) = \frac{a}{2} - 1$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $g(a) = \begin{cases} -a & (a \le 0) \\ \frac{a^3}{2} - a & (0 < a < 1) \\ \frac{a}{2} - 1 & (a \ge 1) \end{cases}$ 이다.

(2) 함수 $g(a)$ 는 연속함수이고, $a \le 0$ 에서 감소하고 $a \ge 1$ 에서 증가하므로 $0 \le a \le 1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$g(a) = \frac{a^3}{2} - a$ 는 $0 < a < 1$ 에서 미분가능하고 $g'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 1 = 0$ 에서 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	↘	극소	↗	$-\frac{1}{2}$

위의 증감표에 의해 함수 $g(a)$ 의 최솟값은 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 이다.

[2]

(1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = e$

$f''(x) = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$ 이므로 $f''(x) = 0$ 에서 $x = e^{\frac{3}{2}}$

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	+	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘

증감표에 의해서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이고, 변곡점은 $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$이다.

따라서 $a=e$, $b=e^{\frac{3}{2}}$이다.

(2) 정적분 $\int_1^b f(t)\,dt$에서 $\ln t = s$로 치환하면

$$\int_1^b f(t)\,dt = \int_1^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln t}{t}\,dt = \int_0^{\frac{3}{2}} s\,ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}$$

$$\int_a^b \frac{f(t)}{\ln t}\,dt = \int_e^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln|t|]_e^{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}$$

이로부터 $\frac{9}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}(9x^2-4x-5) = \frac{1}{8}(x-1)(9x+5) = 0$

따라서 이차방정식의 근은 $x = -\frac{5}{9},\ 1$

(3) $\log_2 3 - \sqrt{1.5} = \frac{\ln 3}{\ln 2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\ln 2}\left(\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$이다. $\frac{2\sqrt{3}}{\ln 2} > 0$이므로 대소의 변화는 없다.

(1) 로부터 다음 증감표를 얻는다.

x	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\sqrt{2} < \sqrt{3} < e$이므로 증감표에 의해 $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) > 0$이다.

$f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = \frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}\left(\log_2 3 - \sqrt{1.5}\right) > 0$이므로

따라서 $\log_2 3 > \sqrt{1.5}$이다.

(4) 닫힌구간 $\left[e^{\frac{1}{1-n}},\ 1\right]$에서 $x^{-n}\ln x < 0$, 부분적분법을 이용한 정적분의 값을 구하면 다음과 같다.

$$a_n = \int_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 |x^{-n}\ln x|\,dx = -\int_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 x^{-n}\ln x\,dx = -\left[\frac{1}{1-n}x^{1-n}\ln x\right]_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 + \frac{1}{1-n}\int_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 x^{-n}\,dx$$

$$= \frac{e}{(n-1)^2} + \left[\frac{1}{(n-1)^2}x^{1-n}\right]_{e^{\frac{1}{1-n}}}^1 = \frac{1}{(n-1)^2}$$

따라서

$$\sum_{n=2}^{2021}\sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=2}^{2021}\frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=2}^{2021}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$