2021학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-3교시)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

2. 확률변수

어떤 시행에서 표본공간 S의 각 원소에 단 하나의 실수가 대응되는 함수를 확률변수라 하고, 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$P(X=x)$$

3. 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

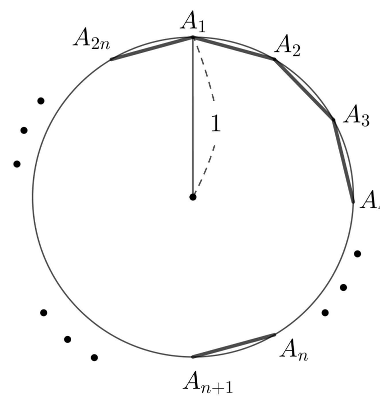
[1] 이차방정식 $x^2-(a+1)x+2a+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, 물음에 답하시오.(단, a는 실수)

(1) 두 복소수 α, β의 켤레복소수 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$에 대하여 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$가 성립함을 보이시오. [6점]

(2) $\omega^4-\overline{\omega}^4=0$을 만족하는 실수 a의 값을 구하시오. [7점]

(3) $\omega^2+\overline{\omega}^2-2\omega\overline{\omega} > -8$을 만족하는 실수 a의 범위를 구하시오. [6점]

[2] 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정$2n$각형 $A_1A_2\cdots A_{2n}$에서 임의의 두 꼭지점을 택하여 두 꼭지점 사이의 거리의 제곱을 확률변수 X_n이라 하자. 물음에 답하시오. (단, $n\geq 2$인 자연수)



(1) 확률변수 X_3의 확률분포를 표로 나타내고, 확률변수 X_3의 기댓값 $E(X_3)$을 구하시오. [7점]

(2) 확률변수 X_4의 기댓값 $E(X_4)$를 구하시오. [7점]

(3) 확률변수 X_n의 기댓값 $E(X_n)$을 구하시오. [9점]

(4) $\lim_{n\to\infty}E(X_n)$을 구하시오. [8점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,

$D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖고, 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

$D=0$이면 중근을 갖고, 중근을 가지면 $D=0$이다.

$D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

2. $a>0$, $a \neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$ 이고

$a>1$ 일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$0<a<1$ 일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

3. 함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a가 아니면서 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \leq g(x)$ 이면 $\alpha \leq \beta$ 이다.

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ 이다.

4. 함수의 극대와 극소의 판정

함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

[1] 실수 a, b와 0이 아닌 실수 k에 대하여 x에 대한 두 방정식이 다음과 같이 주어질 때, 물음에 답하시오.

$$(k-b)x^2+2akx+2=0 \quad \cdots\cdots \text{ ①}$$
$$2x^2+2akx+k-b=0 \quad \cdots\cdots \text{ ②}$$

(1) 방정식 ①이 1개의 실근을 가지도록 하는 a의 조건과 실수 k의 합을 구하시오. [7점]

(2) 두 방정식 ①과 ②의 해집합이 같을 조건을 구하시오. [8점]

[2] 다음 부등식을 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [10점]

$$|\log_2 a - \log_2 10| + \log_2 b \leq 1$$

<다음 장 계속>

[3] 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 미분가능한 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

$$f(x+y) \geq f(x)+f(y)-(xy-1)^2, \quad f(0) \geq 1,\ f'(0)=1$$

(1) $f(0)$을 구하시오. [3점]

(2) 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$를 구하시오. [12점]

(3) 함수 $g(x)=xe^{-x}$이 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [10점]

<끝>

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-3교시_문제1번]

출제 의도

[1] 복소수의 켤레복소수의 뜻에 대한 이해력과 복소수의 사칙연산의 계산 능력을 평가한다. 그리고 이를 바탕으로 방정식과 부등식을 활용하는 응용문제의 해결능력을 평가한다.
[2] 확률변수와 확률분포를 이해하고 주어진 문제의 기댓값을 구하는 과정을 설명할 수 있는 능력을 판단한다. 그리고 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 이를 활용하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취 기준
제시문1	교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
제시문3	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문항 [1]-(1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다.
문항 [1]-(2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 [1](3)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식 $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식
	성취기준	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취 기준
문항 [2](2)	교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
문항 [2](3)	교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합 [확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
문항 [2](4)	교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판(주)	2020	41
	수학 Ⅰ	이준열 외	㈜천재교육	2020	98, 142
	미적분	이준열 외	㈜천재교육	2020	17, 164
	확률과 통계	고성은 외	㈜좋은책신사고	2020	79, 84

문항 해설

[1] (1) 문자를 사용하여 복소수를 구체적으로 표현하고 켤레복소수에 대한 사칙연산을 수행함으로써 해결할 수 있다.

(2) 인수분해를 수행하고 근과 계수의 관계를 활용하여 해결할 수 있다.

(3) 근과 계수의 관계를 활용할 수 있도록 식을 변형하여 해결할 수 있다.

[2] (1) 문제에 맞는 정육각형을 그려서 확률변수와 각각의 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타내고 기댓값을 구하는 문항이다.

(2) 문제에 맞는 정팔각형을 그려서 코사인법칙을 사용하여 확률변수를 구하고, 각각의 확률을 구하여 기댓값을 구하는 문항이다.

(3) (1),(2)번을 통해 얻은 확률변수와 각각의 확률에 대한 규칙을 확인하고 기댓값을 수열의 합으로 표현하여 해결할 수 있다.

(4) 제시문에 주어진 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 활용할 수 있도록 (3)에서 얻은 수열의 합을 변형하고 적분을 계산하여 해결할 수 있다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	α, β 와 이들의 켤레복소수 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 를 문자를 사용하여 표현하였으면	2
	$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$를 정확히 기술하였으면	4
[1](2)	$\omega^4 - \overline{\omega}^4 = 0$ 를 인수분해하여 낮은 차원의 방정식을 얻었으면	2
	문제에서 주어진 방정식에 대한 근과 계수의 관계를 활용하였으면	2
	a 의 조건을 확인하여 a 의 값을 정확히 구하였으면	3
[1](3)	a 에 관한 부등식을 정확히 유도했으면	3
	a 의 조건을 적용하여 a 의 범위을 정확히 구하였으면	3
[2](1)	확률변수를 구하였으면	2
	확률을 구하여 확률분포를 표로 나타내었으면	3
	기댓값을 정확히 구하였으면	2
[2](2)	확률변수를 구하였으면	2
	각 확률을 구하였으면	2
	기댓값을 정확히 구하였으면	3
[2](3)	확률변수를 구하였으면	3
	각 확률을 구하였으면	3
	기댓값을 수열의 합으로 정확히 표현하였으면	3
[2](4)	정적분으로 변형할 수 있도록 급수를 잘 변형하였으면	4
	적분을 정확히 계산하였으면	4

예시 답안

[1]

(1) α 와 β 를 $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 임의의 실수) 라 하면

$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ 이므로

$\overline{\alpha\beta} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ⋯⋯①

그리고 $\overline{\alpha} = a - bi$ 와 $\overline{\beta} = c - di$ 의 곱은

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ⋯⋯②

따라서 ①, ②로부터 $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$가 성립한다.

⑵ 주어진 방정식이 허근을 가지므로.

$D=(a+1)^2-4(2a+1)=a^2-6a-3<0$

$3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}$ …… ③

한편, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.

$0=\omega^4-\overline{\omega}^4=(\omega^2-\overline{\omega}^2)(\omega^2+\overline{\omega}^2)=(\omega-\overline{\omega})(\omega+\overline{\omega})(\omega^2+\overline{\omega}^2)$

(ⅰ) $\omega-\overline{\omega}=0$ 일 때 ω는 실수가 되어 모순이다. 따라서 $\omega-\overline{\omega}\neq 0$ 이다.

(ⅱ) $\omega+\overline{\omega}=0$ 일 때 $\omega+\overline{\omega}=a+1=0$ 에서 $a=-1$ 이다. 그런데 $-1<3-2\sqrt{3}$ 이므로 ③에 어긋난다.

따라서 $\omega+\overline{\omega}\neq 0$ 이다.

(ⅲ) $\omega^2+\overline{\omega}^2=0$일 때 $0=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(a+1)^2-2(2a+1)=a^2-2a-1$ 이다.

이로부터 $a=1\pm\sqrt{2}$ 이다.

$1+\sqrt{2}$ 과 $1-\sqrt{2}$ 둘 다 부등식 ③을 만족한다. 따라서 $\omega^4-\overline{\omega}^4=0$ 을 만족하는 $a=1\pm\sqrt{2}$ 이다.

⑶ $\omega^2+\overline{\omega}^2-2\omega\overline{\omega}=(\omega+\overline{\omega})^2-4\omega\overline{\omega}=(a+1)^2-4(2a+1)=a^2-6a-3$ 이므로 주어진 부등식은 다음과 같다.

$a^2-6a-3>-8 \quad \Rightarrow \quad a^2-6a+5=(a-1)(a-5)>0$

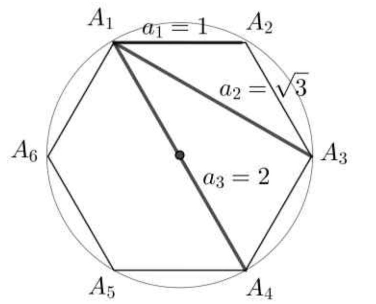
$\Rightarrow \quad a<1$ 또는 $a>5$

그러므로 ③에 의해 a의 범위는 다음과 같다.

$3-2\sqrt{3}<a<1,\ 5<a<3+2\sqrt{3}$

[2]

⑴ 두 꼭지점 사이의 거리가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3로 나타내면 확률변수 X_3의 값은 다음과 같다.(오른쪽 그림 참조)



$(a_1)^2=2\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad (a_2)^2=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=3,\quad (a_3)^2=2^2=4$

6개의 점으로부터 2개를 선택하는 방법의 가짓수는 ${}_6C_2=15$ 이다.

그리고 a_1, a_2가 나타나는 경우의 수가 각각 6이고,

a_3이 나타나는 경우의 수가 3이므로

$P(X_3=(a_1)^2)=P(X_3=(a_2)^2)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},\quad P(X_3=(a_3)^2)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

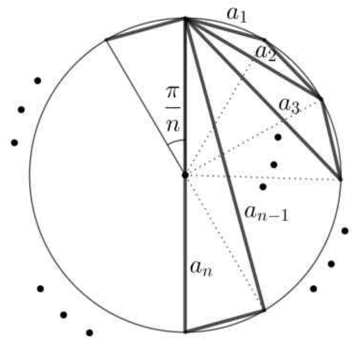
따라서 확률변수 X_3의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_3	1	3	4	합계
$P(X_3=(a_i)^2)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

이로부터 확률변수 X_3의 기댓값은 다음과 같다.

$E(X_3)=1\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{2}{5}+4\cdot\frac{1}{5}=\frac{12}{5}$

⑵ 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 사이의 거리가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3, a_4 로 나타내자. 한 변이 이루는 중심각이 $\dfrac{\pi}{4}$ 이므로 코사인법칙으로부터



$(a_1)^2 = 1+1-2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2-\sqrt{2}$,

$(a_2)^2 = 1+1-2\cos\dfrac{2\pi}{4} = 2(1-0) = 2$,

$(a_3)^2 = 1+1-2\cos\dfrac{3\pi}{4} = 2\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+\sqrt{2}$,

$(a_4)^2 = 1+1-2\cos\dfrac{4\pi}{4} = 2(1+1) = 4$

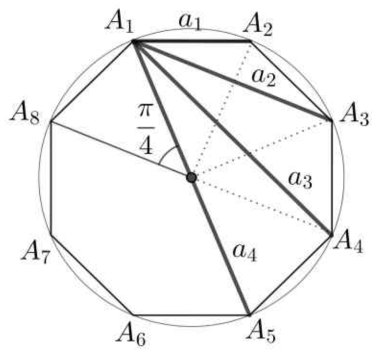
8개의 점으로부터 2개를 선택하는 방법의 가짓수는 ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 이다. 그리고 a_1, a_2, a_3 은 각각 8번 얻을 수 있고, a_4 는 4번 얻을 수 있으므로 확률변수 X_4 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_4	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4	합계
$P(X_4=(a_i)^2)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

이로부터 $E(X_4)$은 다음과 같다.

$$E(X_4) = [(2-\sqrt{2})+2+(2+\sqrt{2})) \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{16}{7}$$

⑶ 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 사이의 거리가 작은 것부터 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 으로 나타내자. 한 변이 이루는 중심각이 $\dfrac{\pi}{n}$ 이므로 코사인법칙으로부터 다음을 얻는다.



$(a_k)^2 = 1+1-2\cos\dfrac{k\pi}{n} = 2\left(1-\cos\dfrac{k\pi}{n}\right) \quad (k=1,2,\cdots,n)$

$2n$ 개의 점으로부터 2개를 선택하는 방법의 가짓수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_2 = n(2n-1)$ 이다. 그리고, a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} 은 각각 $2n$ 번 얻을 수 있고, a_n 은 n 번 얻을 수 있으므로 다음이 성립한다.

$$P(X_n=(a_k)^2) = \begin{cases} \dfrac{2}{2n-1} & (k \neq n) \\ \dfrac{1}{2n-1} & (k=n) \end{cases}$$

따라서 $E(X_n)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \frac{2}{2n-1} + 2\left(1-\cos\frac{n\pi}{n}\right) \cdot \frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{4}{2n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{4}{2n-1} \end{aligned}$$

(4) (3)에서 구한 $E(X_n)$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(X_n)=\frac{4}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)-\frac{4}{2n-1}$$
$$=\frac{4n}{\pi(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}-\frac{4}{2n-1}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{\pi(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}-\frac{4}{2n-1}\right\}$$
$$=\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\pi(2n-1)}\right\}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}\right\}-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2n-1}$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}[x-\sin x]_0^{\pi}=2$$

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-3교시 2번]

출제 의도

[1] ⑴ 일차 혹은 이차방정식을 구별하는 논리적 능력과 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별 능력을 평가한다.
⑵ 방정식의 해집합이 같도록 가능한 논리적 상황을 구분하는 분석력과 계산력을 평가한다.

[2] 로그함수를 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[3] ⑴ 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.
⑵ 미분계수에 대한 이해력과 계산능력을 평가한다.
⑶ 함수의 극대와 극소를 판정하는 능력과 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 계산하는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ]-(1) 함수의 극한과 연속-① 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
제시문4	교육과정	[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-③ 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ]-(1) 함수의 극한과 연속-① 함수의 극한 [수학Ⅱ]-(2) 미분-① 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용 [미적분]-(3) 적분법-① 여러 가지 적분법 [미적분]-(3) 적분법-② 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍석복 외	지학사	2018	58, 60
	수학 Ⅰ	홍석복 외	지학사	2018	56
	수학 Ⅱ	홍석복 외	지학사	2018	25
	수학 Ⅱ	김원경 외	비상교육	2018	16, 84
	미적분	김원경 외	비상교육	2018	132, 149
기타					

문항 해설

방정식과 부등식, 로그함수, 미분, 적분 등의 개념은 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 이해하면 다음과 같은 간단한 과정을 통해 해결할 수 있는 문항이다.

[1] (1) 일차방정식과 이차방정식의 차이를 구별하고 판별식을 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 일차방정식과 이차방정식 혹은 두 이차방정식에 대한 해집합을 같게 하는 논리적 상황을 분석해서 해결할 수 있는 문항이다.
[2] 로그함수를 활용하여 부등식을 만족하는 자연수들의 순서쌍의 개수를 차례로 문항이다.
[3] (1) 주어진 부등식과 조건을 이용하여 $x=0$에서 함숫값을 구하는 문항이다.
(2) 함수의 극한을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 구하고 부정적분과 (1)에서 구한 결과를 이용하여 함수를 구하는 문항이다.
(3) 함수의 극대와 극소를 판정과 부분적분법을 이용한 정적분으로 문제를 해결할 수 있는 문항이다.

채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1](1)	(i) $k=b$인 경우, $a=0$와 $a\neq 0$로 나누어 설명하면	2
	(ii) $k\neq b$인 경우, 판별식을 사용하여 $a\neq 0$임을 보이고 k의 합은 $\frac{2}{a^2}$ 임을 보이면	4
	(i)과 (ii)로부터 $a\neq 0$이고, k의 합이 $b+\frac{2}{a^2}$ 임을 표현하면	1
[1](2)	(i) $k=b$이고 $a=0$일 때, 해집합이 같지 않음을 설명하면	1
	(ii) $k=b$이고 $a\neq 0$일 때, 해집합이 같지 않음을 설명하면	1
	(iii) $k\neq b$ 이고 $a=0$일 때, 해집합이 같을 조건은 $k-b=\pm 2$이다.	2
	(iv) $k\neq b$ 이고 $a\neq 0$일 때, 해집합이 같을 조건 $k-b=2$ 이다.	3
	해집합이 같을 조건 $k-b=-2$(단, $a=0$) 또는 $k-b=2$을 기술하면	1
[2]	$a>10$ 일 때 부등식을 만족하는 순서쌍을 구했으면	3
	$0<a<10$ 일 때 순서쌍을 구했으면	3
	$a=10$ 일 때 순서쌍을 구했으면	3
	순서쌍의 개수 17을 구했으면	1
[3](1)	$f(0)\leq 1$ 임을 보였으면	1
	문제의 조건으로부터 $f(0)=1$ 을 구했으면	2
[3](2)	$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y}=1$ 을 구했으면	3
	$\lim_{y\to 0+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\geq 2x+1$ 임을 보였으면	2
	$\lim_{y\to 0-}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\leq 2x+1$ 임을 보였으면	2
	$f'(x)=2x+1$ 을 구했으면	2
	$f(x)=x^2+x+1$ 을 구했으면	3
[3](3)	$a=1$ 을 구했으면	4
	도형의 넓이를 정적분 $\int_0^1(x^2+x+1-xe^{-x})dx$ 로 표현했으면	2
	부분적분법을 이용하여 $\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1$을 유도했으면	2
	도형의 넓이 $\frac{5}{6}+\frac{2}{e}$ 를 구했으면	2

예시 답안

[1]

⑴ (ⅰ) $k=b$인 경우, 방정식 ①은 $2akx+2=0$이 된다.

$a=0$이면 $2=0$이 되므로 근이 존재하지 않는다.

$a\neq 0$이면 하나의 실근을 가진다.

(ⅱ) $k\neq b$인 경우, 1개의 실근은 중근을 의미하므로 $\frac{D}{4}=a^2k^2-2(k-b)=0$이다.

$a=0$이면 $\frac{D}{4}\neq 0$이 되기 때문에 $a\neq 0$이다.

$\frac{D}{4}$는 k에 대한 이차식이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 k의 합은 $\frac{2}{a^2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 방정식 ①이 1개의 실근을 가지도록 하는 a의 조건은 $a\neq 0$이고, k의 합은 $b+\frac{2}{a^2}$이다.

⑵ (ⅰ) $k=b$이고 $a=0$일 때

방정식 ①은 $2=0$이 되어 근이 존재하지 않고 방정식 ②는 중근 $x=0$을 가지므로 두 해집합은 같지 않다.

(ⅱ) $k=b$이고 $a\neq 0$일 때

방정식 ①의 근은 $x=-\frac{1}{ak}$이고 방정식 ②의 근은 $x=0,\ -ak$이므로 두 해집합은 같지 않다.

(ⅲ) $k\neq b$이고 $a=0$일 때

방정식 ①로부터 $x^2=-\frac{2}{k-b}$이고 방정식 ②로부터 $x^2=-\frac{k-b}{2}$이다.

따라서 해집합이 같을 조건은 $k-b=\pm 2$이다.

(ⅳ) $k\neq b$이고 $a\neq 0$일 때

해집합이 같은 이차방정식은 $p(x-\alpha)(x-\beta)=0$의 형태를 가진다.

방정식 ①과 ②는 일차항이 같으므로 나머지 계수도 같아야 한다.

따라서 $k-b=2$이다.

(ⅰ), (ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)로부터 해집합이 같을 조건은 $k-b=-2$ (단, $a=0$) 또는 $k-b=2$이다.

[2]

$|\log_2 a-\log_2 10|+\log_2 b\ \leq\ 1\ \Rightarrow\ \left|\log_2\frac{a}{10}\right|+\log_2 b\ \leq\ 1$

(ⅰ) $\log_2\frac{a}{10}>0$인 경우 ($a>10$인 경우)

$\log_2\frac{a}{10}+\log_2 b\ \leq\ \log_2 2\ \Rightarrow\ \log_2\frac{ab}{10}\ \leq\ \log_2 2\ \Rightarrow\ \frac{ab}{10}\ \leq\ 2$

그러므로 $ab\ \leq\ 20$ …… ①

a, b가 자연수이고 $a>10$이므로

① 식을 만족하는 경우는 $(11,1)$, $(12,1)$, $\cdots$, $(19,1)$, $(20,1)$로 모두 10가지

(ⅱ) $\log_2\frac{a}{10}<0$인 경우 ($0<a<10$인 경우)

$-\log_2\frac{a}{10}+\log_2 b\ \leq\ 1\ \Rightarrow\ \log_2\frac{10}{a}+\log_2 b\ \leq\ 1\ \Rightarrow\log_2\frac{10b}{a}\ \leq\ \log_2 2\ \Rightarrow\ \frac{10b}{a}\ \leq\ 2\ \Rightarrow\ 10b\ \leq\ 2a$

그러므로 $5b \le a$ …… ②

a, b가 자연수이고 $0 < a < 10$이므로

② 식을 만족하는 경우는 $(9,1)$, $(8,1)$, $(7,1)$, $(6,1)$, $(5,1)$로 5가지

(ⅲ) $\log_2 \frac{a}{10} = 0$ 인 경우 ($a = 10$ 인 경우)

$\log_2 b \le 1 \Rightarrow \log_2 b \le \log_2 2$

그러므로 $b \le 2$ …… ③

a, b가 자연수이고 $a = 10$ 이므로

③ 식을 만족하는 경우는 $(10,1)$, $(10,2)$로 2가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는 모두 17가지이다.

[3]

⑴ $f(x+y) - f(x) \ge f(y) - (xy-1)^2$

$x = 0,\ y = 0$일 때 $f(0) \le 1$

문제의 조건에서 $f(0) \ge 1$이므로 $f(0) = 1$

⑵ 주어진 부등식으로부터

$y > 0$일 때 $\quad \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \ge \frac{f(y)-1}{y} + 2x - x^2 y$ …… ①

$y < 0$일 때 $\quad \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \le \frac{f(y)-1}{y} + 2x - x^2 y$ …… ②

미분계수의 정의와 문제의 조건으로부터

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(y)-1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f'(0) = 1$$

함수의 극한의 대소 관계(제시문 3)에 의하여

①에서 $\lim_{y \to 0+} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \ge 2x + 1$, ②에서 $\lim_{y \to 0-} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \le 2x + 1$

그러므로 $f'(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = 2x + 1$

따라서 $f(x) = x^2 + x + C$ (C는 상수)이고, 조건에서 $f(0) = 1$ 이므로 $f(x) = x^2 + x + 1$ 이다.

⑶ $g(x) = xe^{-x}$ 는 미분가능한 함수이다.

$g'(x) = e^{-x}(1-x)$ 이므로 $g'(x) = 0$에서 $x = 1$ 이다.

$g'(x)$의 부호를 조사하여 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

제시문 4에 의하여 함수 $g(x)$는 $x = 1$ 에서 극댓값을 가지므로 $a = 1$ 이다.

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 직선 $x = 0$, $x = a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 다음과 같다.

$$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1 - xe^{-x})\, dx$$

부분적분법으로 $g(x) = xe^{-x}$ 의 부정적분을 구하면

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C \ (C\text{는 상수})$$

따라서 구하는 넓이는 다음과 같다.

$$S = \int_0^1 (x^2 + x + 1 - xe^{-x})\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + xe^{-x} + e^{-x}\right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{2}{e}$$