2022학년도 논술 모의평가
자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 무리수 e

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.71828182845904\cdots$$

2. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\ \text{ 또는 }\ y'=f'(g(x))g'(x)$$

3. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
   (i) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
   (ii) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

4. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
   (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
   (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

5. 고정된 실수 a를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$가 있을 때, 그 구간에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

6. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b-\int_0^b f'(x)g(x)dx$$

[1] 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=x^3e^{-x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 정적분 $\displaystyle\int_{-e}^{e}x^{2022}f(x)e^{x^2+x}dx$의 값을 구하시오. [4점]

(2) 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. [8점]

(3) 함수 $(f\circ f)(x)$가 극값을 갖도록 하는 x좌표를 구하시오. [12점]

[2] $-2\pi\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^{2021}x+1+\sqrt{2}\,|\cos x|=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 방정식의 모든 실근의 합 a와 곱 b를 구하시오. [8점]

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. (1)에서 구한 a, b에 대하여 $S_n=an^2+\dfrac{b}{\pi}n$ 일 때, 수열의 일반항 a_n을 구하시오. [4점]

[3] 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

(a) $F(x)=f(x)+1-e^x$
(b) $F(1)=1$

(1) 정적분 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$의 값을 구하시오. [6점]

(2) 부등식 $\displaystyle\int_0^1 F(x)\{e^x+F(x)\}dx>n$이 성립하게 하는 정수 n의 최댓값을 구하시오. [8점]

■ 출제 의도

[1] (1) 원점에 대하여 대칭인 함수의 성질을 이해하고 정적분의 계산에 활용하는 능력을 평가한다.
  (2) 함수의 도함수 계산 능력과 극값 결정 능력을 평가한다.
  (3) 합성함수의 극대, 극소를 판정하는 추론 능력과 계산 능력을 평가한다.
[2] (1) 삼각함수의 기본 성질을 이용하여 삼각방정식의 풀이 능력을 평가한다.
  (2) 수열의 합과 일반항과의 관계를 이해하는 능력과 계산 능력을 평가한다.
[3] (1) 적분과 미분의 관계를 이해하고 조건식을 활용하여 정적분의 계산 능력을 평가한다.
  (2) 조건식을 활용한 정적분의 계산 능력과 함께 적분식을 다루는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

미분적분학의 기본적인 개념인 합성함수 미분법, 극값 판정법, 적분과 미분과의 관계, 정적분에 대한 부분적분법의 제시문을 이해하고 활용한다면 각 문항들은 다음과 같은 수학적이고 논리적인 과정을 통해 해결할 수 있다.

[1] (1) 정적분 계산을 원점에 대하여 대칭인 함수의 성질을 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.
  (2) 극대, 극소의 판정을 활용하여 함수의 그래프 개형을 이해하면 해결할 수 있는 문항이다.
  (3) 합성함수의 미분법과 극값 판정법을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.
[2] (1) 삼각함수의 치역을 활용한 삼각함수 방정식 풀이를 통해 해결할 수 있는 문항이다.
  (2) 수열의 합과 일반항과의 관계를 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.
[3] (1) 조건식과 부분적분법을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.
  (2) 조건식과 부분적분법으로 계산한 정적분에 무리수 e를 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	적분되는 함수가 원점에 대칭인 함수임을 보이면	2
	정적분의 값이 0임을 보이면	2
1-2	도함수를 구하고 이로부터 $x=0,\ 3$을 구했으면	2
	$x=0,\ 3$에서 극값 판정을 올바르게 했으면	4
	최댓값을 구했으면	2
1-3	$(f\circ f)'(x)=0$에서 $x=0,\ 3$ 그리고 $f(x)=3$인 x임을 보이면	3
	$x=0$에서 $(f\circ f)'(x)$의 극값 판정을 올바르게 했으면	2
	$x=3$에서 $(f\circ f)'(x)$의 극값 판정을 올바르게 했으면	3
	$f(x)=3$인 x에서 $(f\circ f)'(x)$의 극값 판정을 올바르게 했으면	4
2-1	방정식으로부터 $\sin x=-1$과 $\cos x=0$을 구했으면	4
	x는 $-\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$를 구했으면	2
	실근의 합 a와 실근의 곱 b를 올바르게 구했으면	2
2-2	$a_1=S_1=\frac{\pi}{4}$를 구했으면	1
	$a_n=S_n-S_{n-1}$을 올바르게 구했으면	3
3-1	$\int_0^1 F(x)dx=3-e$를 구했으면	3
	$\int_0^1 xf(x)dx=e-2$를 구했으면	3
3-2	$\int_0^1 (F(x))^2dx=\frac{1}{2}+\int_0^1 F(x)dx-\int_0^1 e^xF(x)dx$를 구했으면	4
	$\int_0^1 F(x)\{e^x+F(x)\}dx=\frac{7}{2}-e$를 구했으면	2
	최대 정수 n을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1]

(1) 적분되는 함수를 $g(x)$라고 하자.

$g(x)=x^{2022}f(x)e^{x^2+x}=x^{2025}e^{x^2}$은 $g(-x)=-g(x)$이므로 원점에 대하여 대칭인 함수이다. $x=-t$로 치환하면

$$\int_{-e}^{e} x^{2022}f(x)e^{x^2+x}dx=\int_0^e g(x)dx+\int_{-e}^{0} g(x)dx=\int_0^e g(x)dx-\int_0^e g(t)dt=0$$

(2) $f'(x)=(-x^3+3x^2)e^{-x}=-x^2(x-3)e^{-x}$이고 $f'(x)=0$에서 $x=0,\ 3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{3}{e}\right)^3$	$\searrow$

따라서 최댓값은 $f(3)=\left(\frac{3}{e}\right)^3$

(3) $(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)=0$에서 $f'(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

$f'(x)=0$인 경우, $x=0,\ 3$

$f'(f(x))=0$인 경우, $f(x)=0,\ 3$이므로 $x=0$ 또는 $f(x)=x^3e^{-x}=3$인 x

(i) $x=0$일 때,

$x=0$의 좌우에서 (2)의 표에서와 같이 $f'(x)$의 부호는 바뀌지 않고, $f'(f(0))=f'(0)$이므로 $(f\circ f)'(x)$의 부호는 바뀌지 않는다.

(ii) $x=3$일 때,

$x=3$의 좌우에서 (2)의 표에서와 같이 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $f'(f(3))>0$이므로 $(f\circ f)'(x)$의 부호도 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 $x=3$에서 극대이다.

(iii) $f(x)=x^3e^{-x}=3$을 만족하는 x일 때,

$f(x)=x^3e^{-x}=3$일 때, (2)에서 $f(x)$의 최댓값은 $\left(\frac{3}{e}\right)^3\approx 1.344$(제시문1 이용)이므로 $f(x)<3$

따라서 $f(x)=x^3e^{-x}=3$인 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)으로부터 함수 $(f\circ f)(x)$가 극값을 갖도록 하는 x좌표는 3

[2]

(1) $\sin^{2021}x=-1-\sqrt{2}|\cos x|$에서 $-\sqrt{2}|\cos x|\le 0$이므로 $\sin^{2021}x\le -1$

또한 $-1\le \sin^{2021}x\le 1$이므로 $\sin^{2021}x=-1$이며 따라서 $\sin x=-1$

이것을 방정식에 대입하면 $\cos x=0$

$-2\pi\le x\le 2\pi$에서 $\sin x=-1$와 $\cos x=0$를 만족하는 x는 $-\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합 a는 π, 모든 실근의 곱 b는 $-\frac{3}{4}\pi^2$

(2) $S_n=an^2+\frac{b}{\pi}n=\pi n^2-\frac{3}{4}\pi n$

$a_1=S_1=\frac{\pi}{4}$ ……①

$n\ge 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=\pi n^2-\frac{3}{4}\pi n-\pi(n-1)^2+\frac{3}{4}\pi(n-1)=2\pi n-\frac{7}{4}\pi$ ……②

①은 ②에 $n=1$을 대입한 결과와 같으므로 구하는 일반항은 $a_n = 2\pi n - \frac{7}{4}\pi \ (n \geq 1)$

[3]

(1) 조건 (a)를 이용하면 $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (f(x)+1-e^x)dx = F(1) + \left[\ x - e^x\ \right]_0^1 = F(1)+2-e$

조건 (b)를 이용하면 $\int_0^1 F(x)dx = 3-e \ \cdots\cdots$③

이로부터 $\int_0^1 xf(x)dx = \left[\ xF(x)\ \right]_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = e-2$

(2) 조건 (a)를 이용하면

$\int_0^1 (F(x))^2 dx = \int_0^1 F(x)(f(x)+1-e^x)dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\frac{(F(x))^2}{2}dx + \int_0^1 F(x)dx - \int_0^1 e^x F(x)dx$

위 식을 정리하여 ③과 조건 (b)를 이용하면

$\int_0^1 F(x)\{e^x + F(x)\}dx = \frac{1}{2}\{(F(1))^2 - (F(0))^2\} + 3 - e = \frac{7}{2} - e$

제시문1을 이용하면 $\frac{7}{2} - e > 0.78$ 따라서 $\int_0^1 F(x)\{e^x+F(x)\}dx > n$인 최대 정수 n은 0