2024학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 사인법칙

삼각형 ABC에서 세 각 $\angle \mathrm{A}, \angle \mathrm{B}, \angle \mathrm{C}$의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고 이들의 대변 BC, AC, AB의 길이를 각각 a, b, c라고 나타낼 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2. 수학적 귀납법

자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[1] 두 곡선 $y = \sin(\pi - x)$와 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$의 교점 중 y축에 가장 가까운 점을 A라고 하고, 점 A에서 각 곡선의 접선과 y축이 만나는 점을 y의 값이 큰 것부터 순서대로 B, C라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [8점]

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R의 값을 구하시오. [5점]

[2] 다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $n! \geq 2^{n-1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [5점]

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$일 때, $a_{2024} - 2024 = m + \alpha \ (0 \leq \alpha < 1)$을 만족시키는 정수 m을 구하시오. [6점]

[3] 자연수 n에 대하여 함수 $f(x) = e^{x+1}(x^2 + nx - n + 1) + kx$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$을 이용하여 a_n을 구하시오. [11점]

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n(a_n+1)(a_n+2)}$의 수렴과 발산을 조사하고 수렴하면 급수의 합을 구하시오. [5점]

[4] 아래 조건들을 모두 만족시키는 실수 k의 범위를 구하시오. [10점]

(가) 이차방정식 $(\ln k - 1)x^2 - 2(\ln k - 1)x + 1 = 0$이 실근을 갖는다.

(나) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2e}k - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ (단, $-\frac{e}{2} \leq k \leq \frac{3e}{2}$)

■ 출제 의도

[1] (1) 곡선의 접선과 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름을 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] (1) 명제의 증명 방법인 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 부등식과 등비수열과 등비급수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] (1) 지수함수와 다항함수의 곱의 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 급수의 부분합을 계산하고 급수의 수렴, 발산을 판별할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 이차방정식과 삼각함수를 포함한 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

도형의 방정식, 명제, 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 도함수, 방정식과 부등식 등의 개념은 다양한 분야에서 유용하게 활용되는 중요한 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 정확히 이해하고 기본적인 논리력을 갖추고 있다면 다음과 같은 과정을 통해서 각 문항들을 해결할 수 있다.

[1] (1) 삼각함수의 성질을 이용하고 곡선의 접선을 구하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 삼각함수 사이의 관계와 코사인정리와 사인정리를 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] (1) 수학적 귀납법으로 명제를 증명하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 부등식과 등비수열과 등비급수의 관계를 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[3] (1) 지수함수와 다항함수의 곱의 도함수를 활용하여 함수의 역함수가 존재하도록 하는 최솟값을 찾으면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 급수의 부분합을 계산하고 극한값을 구함으로써 급수의 수렴, 발산을 판별할 수 있는 문항이다.

[4] 실근을 가지는 이차방정식과 삼각함수를 포함한 부등식에 대한 문제를 풀면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	$y=\sin(\pi-x)=\sin x$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$임을 보이면	2
	교점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$와 y절편 $\frac{\sqrt{2}(4+\pi)}{8}$와 $\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$를 구하면	4
	삼각형의 넓이 $\frac{\sqrt{2}\pi^2}{32}$을 얻으면	2
1-2	$b=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$, $c=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$를 구하면	2
	$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$와 $R=\frac{3\pi}{16}$를 얻으면	3
2-1	$n=1$일 때 증명하면	1
	$n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 증명하면	4
2-2	$1 \le a_n < 2$임을 보이면	4
	$m=-2023$을 얻으면	2
3-1	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이고 $f(x)$는 증가함수이어야 함을 언급하면	2
	$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$와 $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=k$임을 보이면	3
	$f'(x)$의 최솟값을 갖는 점 $x=-1$을 구하면	4
	k의 범위와 $a_n=n$을 얻으면	2
3-2	n항까지의 부분합 S_n을 구하면	2
	$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$임을 보이면	2
	급수가 수렴하고 그 합이 $\frac{1}{4}$임을 언급하면	1
4	조건 (가)의 이차방정식에서 $0<k$, $k\neq e$임을 보이면	2
	조건 (가)의 조건으로부터 $0<k<e$, $e^2 \le k$임을 보이면	3
	조건 (나)의 부등식으로부터 $0 \le k \le e$임을 보이면	4
	k의 범위 $0<k<e$를 얻으면	1

■ 예시 답안

[1] (1) $y=\sin(\pi-x)=\sin\{\pi+(-x)\}=-\sin(-x)=\sin x$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로

$\sin x=\cos x$일 때 $\tan x=1$이고, y축에 가장 가까운 교점은 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$라고 놓으면 $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=-\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=\cos x$위의 점 A에서 접선은 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이고, y절편은 $\frac{\sqrt{2}(4+\pi)}{8}$ …… ①

곡선 $y=\sin x$위의 점 A에서 접선은 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이고, y절편은 $\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$ …… ②

①에서 ②를 빼면 변 BC의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ …… ③

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{32}$

(2) 삼각형 ABC에서 변 BC, AC, AB의 길이를 각각 a,b,c라고 하면

③에서 $a=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$이고, 변의 길이를 구하면 $b=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$, $c=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$

코사인법칙을 이용하여 $\cos A$를 구하면 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{3}$

$\sin^2A+\cos^2A=1$이고 A는 삼각형의 한 각의 크기이므로 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름 R을 구하면

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{4}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\pi}{16}$$

[2] (1) (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1!=1$, (우변)$=2^0=1$

이므로 $n=1$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$k!\ge 2^{k-1}$ …… ①

이므로 ①의 양변에 $k+1$을 곱하면 $k\ge 1$이므로

$(k+1)!=k!(k+1)\ge 2^{k-1}(k+1)\ge 2^{k-1}2=2^k$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

그러므로 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(2) (1)의 부등식을 이용하면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ …… ②

②의 등비수열의 항은 양수이므로

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ …… ③

②와 ③으로부터 모든 자연수 n에 대하여 $1\le a_n<2$

따라서 $-2023\le a_{2024}-2024<-2022$이므로 $m=-2023$이다.

[3] (1) $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이어야 한다.
$g(x)=f'(x)$라고 놓으면 $g(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+1\}+k$
$\lim_{x\to\infty} x^2e^x=\lim_{x\to\infty} xe^x=\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$ 이므로 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$
$x=-t$라고 놓으면 $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$이고, 같은 방법으로 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$이므로 $\lim_{x\to-\infty} g(x)=k$
$g'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+4)x+n+3\}=e^{x+1}(x+1)(x+n+3)$이므로
$g'(x)=0$에서 $x=-n-3$ 또는 $x=-1$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-3$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$e^{-n-2}(n+4)+k$	$\searrow$	$-n+k$	$\nearrow$

$x=-1$에서 $g(x)$는 최솟값을 갖는다.
$g(-1)=-n+k\geq 0$이면 $f'(x)=g(x)\geq 0$(등호는 $x=-1$일 때만 성립)
이므로 $f(x)$는 증가함수다.
따라서 $f(x)$의 역함수가 존재하는 범위는 $k\geq n$이고, 실수 k의 최솟값은 $a_n=n$
(2) 주어진 급수의 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.
$\frac{1}{a_n(a_n+1)(a_n+2)}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}$이므로
주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{4}$

[4] 조건 (가)에서 진수 조건과 이차방정식이라는 사실로부터
$k>0$, $\ln k-1\neq 0$, 즉 $0<k$, $k\neq e$ ⋯⋯ ①
이차방정식은 실근을 가지므로 판별식 $D=4(\ln k-1)^2-4(\ln k-1)=4(\ln k-1)(\ln k-2)\geq 0$으로부터
$\ln k\leq 1$, $2\leq lnk$ 즉, $k\leq e$, $e^2\leq k$ ⋯⋯ ②
①과 ②로부터 $0<k<e$, $e^2\leq k$ ⋯⋯ ③
조건 (나)의 부등식에서 $\frac{\pi}{2e}k-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면
$-\frac{e}{2}\leq k\leq\frac{3e}{2}$이므로 $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$
부등식 $2\sin^2 t-1=(\sqrt{2}\sin t-1)(\sqrt{2}\sin t+1)\leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq \sin t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$
을 풀면 $-\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{\pi}{4}$이고 $-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2e}k-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}$로부터
$0\leq k\leq e$ ⋯⋯ ④
따라서 ③과 ④로부터 k의 범위는 $0<k<e$