2024학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되고

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

2. 미분가능

함수 $y=f(x)$에 대하여

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

[1] 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(x+x^{2n})\ln|x|}{x^{2n}+1} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$을 이용하여 함수 $f(x)$의 연속성을 조사하시오. [12점]

(2) $x=1$에서의 미분가능성을 조사하시오. [4점]

(3) 정적분 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx$를 구하시오. [6점]

[2] 이차 이상의 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = e^{x^3+x+1}$가 아래 조건들을 만족시킬 때, 다항식 $R(x)$를 구하시오. [10점]

(가) $(f \circ g^{-1})(e) = \pi$
(나) $(f \circ g^{-1})'(e) = 1$
(다) $R(x)$는 $f(x)$를 x^2으로 나눈 나머지다.

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 승률이 75%인 바둑기사가 n번의 대국에서 k번 이길 확률 P_k를 구하시오. [4점]

(2) $f(x) = 4^n \sum_{k=0}^{n} P_k x^{k+1}$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [7점]

(3) 다항식 $\sum_{n=1}^{p} \left(4^n \sum_{k=0}^{n} P_k x^{k+1} \right)$에서 x^2의 계수를 구하시오.(단, p는 자연수) [7점]

■ 출제 의도

[1] 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지의 여부와 정적분의 계산력을 판단한다.

[2] 합성함수와 역함수의 미분법을 이해하고 계산할 수 있는지를 판단한다.

[3] 독립시행의 확률과 이항정리를 이해하고 활용할 수 있는 능력을 판단한다.

■ 문항 해설

[1] (1) 구간을 나누어 극한값을 계산함으로써 함수를 올바르게 나타내고 연속성의 정의를 적용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 미분가능성의 정의를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 구간을 나누어 정적분을 계산하고 그 과정에서 부분적분법을 수행할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] 합성함수와 역함수의 미분법을 활용하고 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 독립시행의 확률을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 이항정리를 활용하여 다항함수를 구하고 미분할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 다항식을 항으로 하는 등비수열의 합을 구할 수 있는지와 특정 차수의 계수를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	$\lvert x\rvert < 1,\ x \neq 0$일 때, $f(x) = x\ln\lvert x\rvert$을 얻고 연속임을 언급하면	2
	$\lvert x\rvert > 1$일 때, $f(x) = \ln\lvert x\rvert$을 얻고 연속임을 언급하면	2
	$x = -1$에서 함수 $f(x)$가 연속임을 보이면	2
	$x = 1$에서 함수 $f(x)$가 연속임을 보이면	2
	$x = 0$에서 함수 $f(x)$가 연속임을 보이면	4

하위 문항	채점 기준	배점
[1](2)	$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$임을 보이면	2
	$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$임을 보이면	2
[1](3)	$\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx$임을 보이면	1
	$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\,dx + [x\ln x - x]_1^e$임을 보이면	4
	정적분 값이 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4e^2}$임을 보이면	1
[2]	$f(x) = x^2 Q(x) + ax + b$임을 보이면	2
	$b = \pi$를 얻으면	2
	$(f \circ g^{-1})'(e) = f'(g^{-1}(e))(g^{-1})'(e) = f'(0)\frac{1}{g'(0)}$ 임을 보이면	4
	$a = e$를 얻으면	2
[3](1)	$P_k = {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$ 임을 보이면	4
[3](2)	$f(x) = (1+3x)^n x$임을 보이면	4
	$f'(1) = 2^{2n-2}(3n+4)$를 얻으면	3
[3](3)	$\sum_{n=1}^{p}\left(4^n \sum_{k=0}^{n} P_k x^{k+1}\right) = \frac{1}{3}(1+3x)^{p+1} - \frac{1}{3}(1+3x)$임을 보이면	4
	x^2의 계수 $\frac{3(p+1)p}{2}$ 를 얻으면	3

■ 예시 답안

[1]

(1) (ⅰ) $|x|<1(\Leftrightarrow|x^2|<1)$, $x\neq 0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=x\ln|x|$는 연속이다.

(ⅱ) $|x|>1(\Leftrightarrow|x^2|>1)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty \text{이므로} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x^{2n}}+1\right)\ln|x|}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\ln|x| \text{는 연속이다.}$$

(ⅲ) $x=-1,\ 0,\ 1$일 때, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터

$$f(x)=\begin{cases} x\ln|x| & (|x|<1,\ x\neq 0) \\ \ln|x| & (|x|>1) \\ 0 & (x=-1,\ 0,\ 1) \end{cases}$$

(ⅳ) $x=-1,\ 1$에서 연속성을 조사하자.

$\lim_{x\to-1-}\ln|x|=\lim_{x\to-1+}x\ln|x|=0=f(-1)$이므로 $x=-1$에서 함수 $f(x)$는 연속이다.

$\lim_{x\to 1-}x\ln|x|=\lim_{x\to 1+}\ln|x|=0=f(1)$이므로 $x=1$에서 함수 $f(x)$는 연속이다.

(ⅴ) $x=0$에서 연속성을 조사하자.

$\ln x=t$라고 놓으면 $\lim_{x\to 0+}x\ln|x|=\lim_{t\to-\infty}te^t$ …… ①

①에서 $t=-p$라고 놓으면 $\lim_{t\to-\infty}te^t=-\lim_{p\to\infty}\frac{p}{e^p}=0=f(0)$

$\ln(-x)=t$라고 놓으면 $\lim_{x\to 0-}x\ln|x|=\lim_{t\to-\infty}(-te^t)$…… ②

②에서 $t=-p$라고 놓으면 $\lim_{t\to-\infty}(-te^t)=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{e^p}=0=f(0)$

따라서 $x=0$에서 함수 $f(x)$는 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅳ), (ⅴ)로부터 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

(2) $$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=\ln e=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0-}(1+h)\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=1\cdot \ln e=1$$

좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\,dx + [x\ln x - x]_1^e$

$= \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} + e - e + 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4e^2}$

[2]

조건 (다)에서 $f(x)$를 x^2으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라고 하면

$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$ …… ①

조건 (가)에서 $g^{-1}(e)=0$이므로 $f(0)=b=\pi$

조건 (나)에서 $(f \circ g^{-1})'(e)=f'(g^{-1}(e))(g^{-1})'(e)=f'(0)\frac{1}{g'(0)}$ …… ②

$g'(0)=e$이고, ①로부터 $f'(x)=2xQ(x)+x^2Q'(x)+a$이므로 $f'(0)=a$

이것들을 ②에 대입하면 $(f \circ g^{-1})'(e)=\frac{a}{e}=1$ 즉, $a=e$

따라서 $R(x)=ex+\pi$

[3]

(1) 어떤 시행(대국)에서 사건 A(바둑기사가 승리)의 확률이 $\frac{3}{4}$일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 k번 일어날 확률 P_k는 독립시행의 확률이다.

$P_k = {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$

(2) $f(x)=4^n\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(3x)^kx = (1+3x)^nx$

$f'(x)=3n(1+3x)^{n-1}x+(1+3x)^n = (1+3x)^{n-1}(3nx+1+3x)$

따라서 $f'(1)=2^{2n-2}(3n+4)$

(3) $\sum_{n=1}^{p}\left(4^n\sum_{k=0}^{n}P_kx^{k+1}\right)=\sum_{n=1}^{p}(1+3x)^nx$

$=(1+3x)x+(1+3x)^2x+\cdots\cdots+(1+3x)^px = \frac{(1+3x)x\{(1+3x)^p-1\}}{(1+3x)-1}$

$=\frac{1}{3}(1+3x)^{p+1}-\frac{1}{3}(1+3x)$

다항식에서 x^2의 항을 구하면 $\frac{{}_{p+1}\mathrm{C}_2(3x)^2}{3}$

따라서 x^2의 계수는 $\frac{3(p+1)p}{2}$