[광운대학교 2024학년도 논술고사 문제 해설-자연계열 1교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분, 수학, 수학I, 수학II
	핵심개념 및 용어	수열, 로그함수, 유리함수, 경우의 수
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

   ① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha+\beta$

   ② $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

2. 유리함수 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ $(k \neq 0)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

3. 집합 A의 원소가 유한개일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호 $n(A)$로 나타낸다.

[1] 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 극한값 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n$을 구하시오. [6점]

(2) 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = -\dfrac{a_n}{2n+1}$일 때, 자연수 n에 대하여 $b_n < b_{n+1}$임을 증명하시오. [8점]

[2] 함수 $f(x) = ax(x-2\pi)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, a는 0이 아닌 실수)

$0 \le x \le 2\pi$에서 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

(1) $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $f(x)+|cos\,x| = -\dfrac{x}{\pi}$의 실근이 없음을 증명하시오. [8점]

(2) 함수 $g(x) = \dfrac{x-p}{x+2p}$에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하도록 하는 실수 p의 범위를 구하시오. $\left(\text{단, } p\text{는 } 0\text{과 } -\dfrac{1}{2}\text{이 아닌 실수}\right)$ [12점]

[3] 다음 두 집합 A, B에 대하여 물음에 답하시오.

$A = \{\ a\ |\ a$는 4의 배수인 자연수 $\}$ $B = \{\ b\ |\ b$는 7개의 숫자 $0,1,2,3,4,5,6$을 중복 없이 사용하여 만든 일곱 자리 자연수 $\}$

(1) $n(A \cap B)$를 구하시오. [8점]

(2) 집합 B의 원소를 큰 수부터 차례로 $b_1, b_2, \cdots, b_{n(B)}$라고 할 때, b_{1000}의 값을 구하시오. [8점]

3. 출제 의도

[1] 로그함수의 성질과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지, 도함수를 활용하여 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[2] 삼각함수의 뜻을 알고 코사인 함수의 그래프를 그릴 수 있는지, 유리함수의 그래프를 그릴 수 있고 그 성질을 이해하는지, 이를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[3] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 경우의 수를 구할 수 있는지, 이를 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한-① 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02]수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

제시문2	교육과정	[수학]-(4) 함수-2 유리함수와 무리함수
	성취기준	[10수학04-04]유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
제시문3	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산-1 집합
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한-1 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-3 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학I]-(2) 삼각함수-1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학]-(4) 함수-2 유리함수와 무리함수
	성취기준	[10수학04-04]유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계-1 경우의 수
	성취기준	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계-1 경우의 수
	성취기준	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2019	17
	수학 Ⅰ	홍성복 외	지학사	2019	239-241
	미적분	김원경 외	비상교육	2018	55-57
	수학	김원경 외	비상교육	2018	245
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 로그함수의 성질과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
(2) 도함수를 활용하여 부등식에 대한 주어진 문제를 해결할 수 있다. 또는 간단히 로그함수의 성질만으로도 주어진 부등식의 문제를 해결할 수 있다.

[2] (1) 주어진 조건을 사용하여 계수를 결정하고 삼각함수의 그래프를 그려 방정식의 문제를 해결할 수 있다. 또는 간단히 좌변과 우변의 부호를 비교하여 방정식의 문제를 해결할 수 있다.

(2) 유리함수의 그래프를 그리고 점근선에 가까워질수록 함숫값이 한없이 커지거나 작아지는 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

[3] (1) 집합의 개념을 이해하고, 조건을 만족하는 집합의 원소를 찾은 후 교집합 연산을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
(2) 곱의 법칙과 합의 법칙을 이용해 경우의 수를 순서대로 셈함으로써 문제를 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	$\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\right\}$	2
	$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}^2\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^2\right]$	2
	$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}^2+\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^2\right\}=2$	2
[1](2)	$f(x)=-\frac{1}{2x+1}\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)$ 놓으면	2
	$f'(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)+\frac{1}{2x+1}\times\frac{\frac{4}{(2x-1)^2}}{1+\frac{2}{2x-1}}$ 도함수를 계산하면	2
	$x\geq 1$에서 $f'(x)>0$임을 근거를 제시하여 진술하면	2
	앞의 계산을 이용하여 논리적으로 $b_n<b_{n+1}$임을 결론 내리면	2
[2](1)	주어진 조건을 활용하여 a의 값을 얻으면	2
	그래프를 그리거나 좌, 우변의 부호를 비교하여 해가 존재하지 않는 근거를 올바로 제시하면	4
	앞의 근거를 기반으로 올바로 결론을 도출하면	2

하위 문항	채점 기준	배점
[2](2)	$g(t)=1-\dfrac{3p}{t+2p}$의 그래프의 점근선은 $y=1$과 $t=-2p$을 얻으면	3
	$-2p<0$인 경우를 올바로 다루면	3
	$0<-2p<1$인 경우를 올바로 다루면	3
	$1<-2p$인 경우를 올바로 다루면	3
[4](1)	$A\cap B$의 원소의 성질에 대해 기술하면	2
	$5!\times 4=480$인 경우를 계산하면	2
	$4\times 4!\times 8=768$인 경우를 계산하면	2
	$n(A\cap B)=480+768=1248$을 얻으면	2
[4](2)	6□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $6!=720$임을 계산하면	2
	올바른 계산을 통해 a_{1000}은 53으로 시작하는 수임을 얻으면	2
	올바른 계산을 통해 a_{1000}은 5341로 시작하는 수임을 얻으면	2
	올바른 계산을 통해 $a_{1000}=5341206$을 얻으면	2

7. 예시 답안

[1] (1)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}^2\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right\}^2+\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^2\right\}=2$$

(2)

$b_n = -\dfrac{a_n}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+1}\ln\left(1+\dfrac{2}{2n-1}\right)$에서 자연수 n을 실수 x로 치환하여 함수 $f(x)$로 표현하면

$f(x) = -\dfrac{1}{2x+1}\ln\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)+\frac{1}{2x+1}\times\frac{\dfrac{4}{(2x-1)^2}}{1+\dfrac{2}{2x-1}}$$

$x \geq 1$에서 $\dfrac{2}{(2x+1)^2}\ln\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right) > 0$이고 $\dfrac{1}{2x+1}\times\dfrac{\dfrac{4}{(2x-1)^2}}{1+\dfrac{2}{2x-1}} > 0$이므로 $f'(x) > 0$

$f(x)$는 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $f(x) < f(x+1)$이다.
따라서 $f(n) < f(n+1)$이므로 $b_n < b_{n+1}$이다.

(다른 풀이)

$n \geq 1$일 때, $b_n \neq 0$이므로 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+1}{2n+3}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{2n+1}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{2}{2n-1}\right)}$

$\dfrac{2n+1}{2n+3} < 1$이고 $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{2n+1}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{2}{2n-1}\right)} < 1$이므로 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 1$

양변에 b_n을 곱해주면 $b_n < 0$이므로 $b_n < b_{n+1}$

[2] (1)
$f(0) = f(2\pi) = 0$이고 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $f(x)$의 최댓값이 1이므로
$f'(x) = 2ax - 2\pi a = 0$인 $x = \pi$에서 $f(x)$는 최댓값을 갖는다.

$f(\pi) = -a\pi^2 = 1$이므로 $a = -\dfrac{1}{\pi^2}$

따라서 주어진 방정식은 $-\dfrac{1}{\pi^2}x^2 + \dfrac{2}{\pi}x + |cos\,x| = -\dfrac{x}{\pi}$

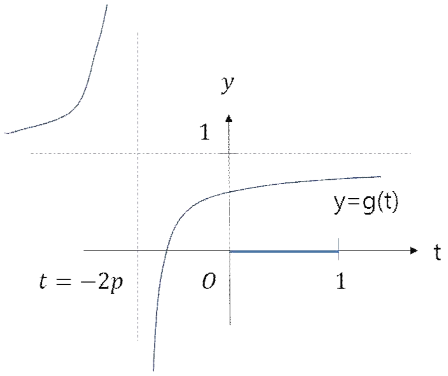
$0 \leq x \leq 2\pi$에서 좌변 $f(x) + |\cos x| > 0$이고 우변 $-\dfrac{x}{\pi} \leq 0$이므로
실근은 존재하지 않는다.

(2)
$0 \leq x \leq 2\pi$에서 $f(x) = t$로 치환하면 $0 \leq t \leq 1$이고 $(g \circ f)(x) = g(t)$

$g(t) = 1 - \dfrac{3p}{t+2p}$의 그래프의 점근선은 $y=1$과 $t=-2p$이다.

(ⅰ) $-2p < 0$인 경우, $p > 0$

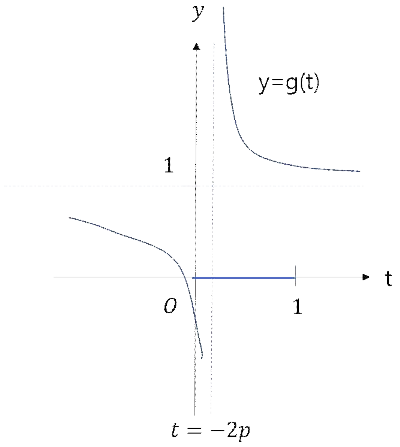
$-3p < 0$이므로 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 \le t \le 1$에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

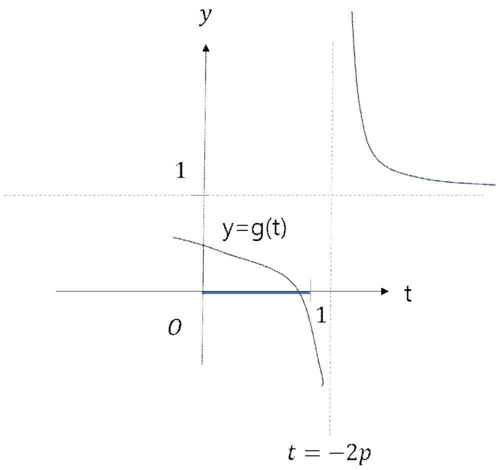
(ⅱ) $0 < -2p < 1$인 경우, $-\dfrac{1}{2} < p < 0$

$-3p > 0$이므로



$0 \le t \le 1$에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하지 않는다.

(ⅲ) $1 < -2p$인 경우 $p < -\dfrac{1}{2}$이므로 $-3p > \dfrac{3}{2}$



$0 \le t \le 1$에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터 $(g \circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 p의 범위는

$p < -\dfrac{1}{2}$ 또는 $p > 0$

[3] (1)

$A = \{4n | n = 1, 2, \cdots\}$이므로 $A \cap B$의 원소는 B의 원소 중에서 4의 배수인 자연수이다.
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$으로 만든 일곱 자리 자연수가 4의 배수인 경우는 끝의 두 자리 수가 각각
$04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60, 64$일 때이다.
(ⅰ) 끝의 두 자리수가 0을 포함하는 경우($04, 20, 40, 60$)
앞의 다섯 자리에는 나머지 다섯 개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로
$5! \times 4 = 480$
(ⅱ) 끝의 두 자리수가 0을 포함하지 않는 경우($12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64$)
백만 자리는 나머지 5개의 숫자 중에서 0을 제외한 네 가지가 올 수 있고,
십만, 만, 천, 백의 자리는 이미 사용한 숫자를 제외한 나머지 네 개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로
$4 \times 4! \times 8 = 768$
(ⅰ), (ⅱ)로부터 $n(A \cap B) = 480 + 768 = 1248$

(2)

집합 B의 원소를 큰 수부터 차례로 세어보면 다음과 같다.
6□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $6! = 720$
5□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $6! = 720$
따라서 a_{1000}은 5로 시작하는 수이다.
56□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $5! = 120$
54□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $5! = 120$
여기까지 모두 960개이므로 a_{1000}은 53으로 시작하는 수이다.
536□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $4! = 24$

여기까지가 모두 984개이므로 a_{1000}은 534로 시작하는 수이다.

$5346\square\square\square$ 형태의 자연수의 개수는 $3!=6$

$5342\square\square\square$ 형태의 자연수의 개수는 $3!=6$

여기까지가 모두 996개이므로 a_{1000}은 5341로 시작하는 수이다.

$53416\square\square$ 형태의 자연수의 개수는 $2!=2$

$53412\square\square$ 형태의 자연수의 개수는 $2!=2$

여기까지가 모두 1000개이므로 a_{1000}은 $53412\square\square$ 형태에서 나머지 $0, 6$로 만들 수 있는 가장 작은 수이다.

따라서 $a_{1000}=5341206$

[광운대학교 2024학년도 논술고사 문제 해설-자연계열 1교시 2번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	귀류법, 도함수의 활용, 적분법, 부등식
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

2. 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때
   ① 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
   ② 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

3. 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

4. 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[1] 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. [6점]

(가) $f(0)=1$ (나) 모든 실수 x에서 $f(3x)=f(x)+x^3$이다.

[2] 방정식 $8x^3-6x+1=0$의 실근이 유리수가 아님을 증명하시오. [12점]

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 정적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^8}{1+x^2}\,dx$를 구하시오. [6점]

(2) (1)에서 구한 값을 I라고 할 때, 부등식 $\displaystyle\left| I-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \right| \le \frac{1}{9}$이 성립함을 증명하시오. [8점]

[4] 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $n \ge 3$인 자연수 n에 대하여 n^{n+1}과 $(n+1)^n$의 크기를 비교하시오. [8점]

(2) 함수 $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{x+1}$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=e^2-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

[1] 항등식의 성질을 이해하는 능력을 평가한다. 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수와 상수항을 정하여 다항함수를 구하는 능력을 평가한다.

[2] 명제를 증명하는 방법 중 귀류법을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[3] 다항함수의 정적분을 구하는 능력을 평가한다. 정적분을 구하는 방법인 치환적분법을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[4] 로그함수를 활용하여 두 수의 크기를 비교하는 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다. 함수의 몫을 미분할 수 있는 능력과 함수의 증가와 감소를 이용하여 문제를 해결하는 과정을 설명할 수 있는

능력을 판단한다. 또한 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결하는 능력을 평가한다. 치환적분법과 부분적분법을 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산-$\boxed{2}$ 명제
	성취기준	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
제시문2	교육과정	[수학II]-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문3	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문4	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1]	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-$\boxed{2}$ 나머지정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문항 [2]	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산-$\boxed{2}$ 명제
	성취기준	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학II]-(3) 적분-$\boxed{2}$ 정적분
	성취기준	[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수 [미적분]-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
	성취기준	[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2018	25, 190
	수학 I	홍성복 외	지학사	2019	45, 52
	수학 II	김원경 외	비상교육	2018	80, 117
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	60, 82
	미적분	김원경 외	비상교육	2018	135, 137, 149
기타					

5. 문항 해설

명제, 로그함수, 미분, 적분 등은 가장 기본적인 수학적 개념들이고, 다양한 분야에서 유용하게 이용되고 있다. 이러한 개념들을 이해하고 이를 활용하여 다음과 같은 과정을 통해 해결할 수 있는 문항들이다.

[1] 항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수와 상수항을 정하여 다항함수를 구한다.

[2] 귀류법을 이용하여 주어진 명제를 증명한다.

[3](1) 피적분함수를 다항함수로 나타내고, 다항함수의 실수배, 합, 차를 구하는 정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분을 구한다.

(2) 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하고, 주어진 부등식이 성립함을 증명한다.

[4](1) 주어진 두 수의 자연로그 값을 비교하는 문제로 바꾼 다음, 미분을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단하여 두 수의 크기를 비교한다.

(2) 도형의 넓이를 정적분으로 나타내고, 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ $(m \ge 3)$으로 나타내면	1
	$a_3 = \frac{1}{26}$, $a_k = 0\,(1 \le k \le m,\ k \ne 3)$을 얻으면	3
	$f(x) = \frac{1}{26}x^3 + 1$을 얻으면	2
[2]	귀류법을 이용하여 실근 x가 유리수라고 가정하면	2
	$x=\frac{a}{b}(b \ne 0,\ a, b$는 서로소인 정수)로 놓고 b는 짝수, a는 홀수임을 얻으면	4

하위 문항	채점 기준	배점
	$b=2k$로 놓고 $a^3=k^2(3a-k)$가 짝수임을 얻으면	4
	a가 짝수이고 a는 홀수임에 모순이라고 표현하면	2
[3](1)	$\frac{1-x^8}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6$을 얻으면	1
	$\int_0^1(1-x^2+x^4-x^6)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1$을 얻으면	3
	정적분 $\int_0^1\frac{1-x^8}{1+x^2}dx=\frac{76}{105}$을 얻으면	2
[3](2)	치환적분법으로 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$를 얻으면	5
	정적분 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$를 얻으면	1
	부등식 $\left\vert I-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right\vert\le\frac{1}{9}$을 증명하면	2
[4](1)	$x>e$이면 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$는 감소함수임을 얻으면	5
	$n\ge 3>e$이면 $\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}$을 얻으면	1
	$n^{n+1}>(n+1)^n$을 얻으면	2
[4](2)	도형의 넓이를 $\int_0^{e^2-1}\vert g(x)\vert dx=\int_0^{e^2-1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$로 표현하면	3
	치환적분법으로 $\int_0^{e^2-1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx=\int_0^2 te^{-t}dt$를 얻으면	3
	부분적분법으로 $\int_0^2 te^{-t}dt=[-te^{-t}-e^{-t}]_0^2$를 얻으면	2
	도형의 넓이 $1-\frac{3}{e^2}$을 얻으면	2

7. 예시 답안

[1] $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0\ (m \ge 3)$으로 놓으면 조건 (나)에 의하여

$f(3x)-f(x)=(3^m-1)a_m x^m+\cdots+(3^3-1)a_3x^3+\cdots+(3^1-1)a_1x = x^3$

항등식의 성질에 의하여 $(3^3-1)a_3=1$, $(3^k-1)a_k=0\ (1 \le k \le m,\ k \ne 3)$이므로

$a_3=\dfrac{1}{26}$, $a_k=0\ (1 \le k \le m,\ k\ne 3)$

그러므로 $f(x)=\dfrac{1}{26}x^3+a_0$

조건 (가)로부터 $a_0=f(0)=1$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{26}x^3+1$

(다른 풀이) $f(3x)-f(x)=x^3$에서 x 대신 $\dfrac{x}{3}$, $\dfrac{x}{3^2}$, $\dfrac{x}{3^3}$, $\cdots$, $\dfrac{x}{3^n}$를 차례로 대입하면

$f(x)-f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\left(\dfrac{x}{3}\right)^3$,

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)-f\left(\dfrac{x}{3^2}\right)=\left(\dfrac{x}{3^2}\right)^3$,

$f\left(\dfrac{x}{3^2}\right)-f\left(\dfrac{x}{3^3}\right)=\left(\dfrac{x}{3^3}\right)^3$,

$\cdots\cdots$

$f\left(\dfrac{x}{3^{n-1}}\right)-f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)=\left(\dfrac{x}{3^n}\right)^3$

위 식들의 좌변과 우변을 각각 더하면

$f(x)-f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)=\left(\dfrac{x}{3}\right)^3+\left(\dfrac{x}{3^2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{x}{3^n}\right)^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x}{3^k}\right)^3=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^3}{(3^3)^k}$

$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^3}{(3^3)^k}+f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$

n이 한없이 커지면 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^3}{(3^3)^k}+\lim_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ $\cdots\cdots$㉠

$t=\dfrac{x}{3^n}$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이고, $f(t)$는 $t=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)=\lim_{t\to 0}f(t)=f(0)$ $\cdots\cdots$㉡

따라서 ㉠, ㉡과 조건 (가)로부터 $f(x)=\dfrac{\dfrac{x^3}{3^3}}{1-\dfrac{1}{3^3}}+f(0)=\dfrac{1}{26}x^3+1$

[2] 귀류법으로 방정식 $8x^3-6x+1=0$의 실근 x가 유리수가 아님을 증명하자.

x가 유리수라고 가정하면, $x=\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0,\ a, b$는 서로소인 정수)로 쓸 수 있다.

방정식에 대입하여 정리하면 $b^3=2(3ab^2-4a^3)$ ……㉠

b는 짝수이므로 정수 k에 대하여 $b=2k$이고, a와 b는 서로소이므로 a는 홀수이다.

$b=2k$를 식 ㉠에 대입하면 $a^3=3ak^2-k^3=k^2(3a-k)$ ……㉡

식 ㉡에서 k가 홀수이면 $3a-k$는 짝수이고 k가 짝수이면 k^2이 짝수이므로 $k^2(3a-k)$는 짝수이다.

a^3은 짝수이므로 a도 짝수이며, 이것은 a가 홀수임에 모순이다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 유리수가 아니다.

[3]

(1) $1-x^8=(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6)$이므로

$$\int_0^1 \frac{1-x^8}{1+x^2}dx=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^6)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{76}{105}$$

(2) 정적분 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$을 구하기 위하여 $x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

따라서 $\left|I-\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|=\left|\dfrac{76}{105}-\dfrac{\pi}{4}\right|\leq\dfrac{1}{9}$

(다른 풀이)

$$I-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{-x^8}{1+x^2}dx$$ 이고 $\dfrac{x^8}{1+x^2}\leq x^8$이므로

$$\left|I-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1\frac{x^8}{1+x^2}dx\leq\int_0^1x^8dx=\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1=\frac{1}{9}$$

[4]

(1) n^{n+1}과 $(n+1)^n$의 자연로그를 $n(n+1)$로 각각 나누면 $\dfrac{\ln n}{n}$과 $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$이다.

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$를 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$이면 $x=e$이다.

$x>e$이면 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 $n\geq 3>e$이면 $\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$이고, $n^{\frac{1}{n}}>(n+1)^{\frac{1}{n+1}}$이므로 $n^{n+1}>(n+1)^n$

(2) $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{x+1}=\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$이므로 $x\geq 0$에서 $g(x)\geq 0$

도형의 넓이 S는

$S=\int_0^{e^2-1}|g(x)|dx=\int_0^{e^2-1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

$t=\ln(x+1)$로 놓으면 $dt=\frac{1}{x+1}dx$이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=e^2-1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^{e^2-1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx=\int_0^2 te^{-t}dt=[-te^{-t}]_0^2-\int_0^2(-e^{-t})dt=[-te^{-t}-e^{-t}]_0^2=1-\frac{3}{e^2}$

따라서 도형의 넓이 S는

$S=1-\frac{3}{e^2}$