2026학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. n이 자연수일 때,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

2. 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

3. 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
   ① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
   ② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

4. 함수 $f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

[1] 세 직선 $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x$, $y=mx+2$ $(m>0)$로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, 이 삼각형의 넓이를 구하시오. [10점]

[2] $(1+x)^n$의 전개식을 이용하여 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4k^2+2k-1}{k+1}\,{}_n\mathrm{C}_k = \frac{a_n}{n+1}$에서 a_n을 구하시오.(단, n은 자연수) [10점]

[3] $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $f(x) = \cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - 2a\cos(x+\pi) - 1$의 최댓값이 2일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오.(단, $a>0$) [10점]

[4] 함수 $f(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$의 극값을 구하고, 변곡점의 좌표를 구하시오. [14점]

(2) 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수를 실수 k의 범위에 따라 구하시오. [6점]

■ 출제 의도

[1] 두 점 사이의 거리를 구하고 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 이항정리를 이해하고 다항함수의 미분과 적분을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[3] 삼각함수의 성질을 이해하고 삼각함수를 포함한 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] (1) 미분을 이용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 변곡점을 판정할 수 있는지를 평가한다.

(2) 함수의 그래프를 활용하여 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

■ 문항 해설

[1] 직선의 교점 사이의 거리를 구하여 이등변삼각형이 되기 위한 조건을 찾으면 이등변삼각형의 넓이를 구할 수 있는 문항이다.

[2] 이항정리와 다항함수의 미분과 적분을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 값을 결정할 수 있는 문항이다.

[3] 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 최솟값을 구할 수 있는 문항이다.

[4] (1) 도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고, 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록, 변곡점을 판정할 수 있는 문항이다.

(2) 함수의 그래프를 활용하면 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	삼각형의 꼭지점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3-m}, \frac{6}{3-m}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{-6}{1+3m}, \frac{2}{1+3m}\right)$를 구하면	2
	두 직선이 수직임을 언급하고 $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$를 구하면	3
	$m=\frac{1}{2}$을 구하면	3
	넓이 $\frac{16}{5}$을 구하면	2
[2]	$\sum_{k=0}^{n} k\,{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\cdot 2^{n-1}$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$을 구하면	4
	$\sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k}=2^{n}$을 구하면	2
	$\sum_{k=0}^{n}\frac{4k^2+2k-1}{k+1}{}_{n}\mathrm{C}_{k}=\frac{n^2\cdot 2^{n+1}-1}{n+1}$과 $a_n=n^2\cdot 2^{n+1}-1$을 구하면	4
[3]	$f(x)=-\cos^2 x+2a\cos x$로 나타내면	3
	$a=\frac{3}{2}$을 구하면	5
	최솟값 $f(\pi)=-4$를 구하면	2
[4](1)	$f'(x)=0$인 점 $x=2$를 구하면	3
	$f''(x)=0$인 점 $x=-1$를 구하면	3
	일계도함수와 이계도함수의 부호를 조사하면	2
	$x=0$에서 극대이고, 극댓값 0을 구하면	2
	$x=2$에서 극소이고, 극솟값 $-\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}$을 구하면	2
	변곡점의 좌표 $\left(-1, -\frac{18}{5}\right)$을 구하면	2
[4](2)	$k<-\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}$ 또는 $k>0$일 때 1개를 구하면	2
	$k=-\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}$ 또는 $k=0$일 때 2개를 구하면	2
	$-\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}<k<0$일 때 3개를 구하면	2

■ 예시 답안

[1]

두 직선 $y=3x$와 $y=mx+2$의 교점을 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3-m}, \frac{6}{3-m}\right)$, $m\neq 3$

두 직선 $y=-\frac{1}{3}x$와 $y=mx+2$의 교점을 $\mathrm{Q}\left(\frac{-6}{1+3m}, \frac{2}{1+3m}\right)$, $m\neq -\frac{1}{3}$

$y=3x$와 $y=-\frac{1}{3}x$가 수직이므로 주어진 도형이 이등변삼각형이면 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$

$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{2\sqrt{10}}{|3-m|}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{2\sqrt{10}}{|1+3m|}$ 이므로 $|3-m|=|1+3m| \Rightarrow m=\frac{1}{2}$ ($\because m>0$)

이등변삼각형 OPQ의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{16}{5}$

(다른 풀이)

$m=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times$(원점과 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$와의 거리)$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{16}{5}$

[2]

$(1+x)^n$을 전개하면 $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ ……①

$x=1$을 대입하면 $2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$ ……②

①의 양변을 미분하면

$n(1+x)^{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2x+\cdots+r\,{}_n\mathrm{C}_rx^{r-1}+\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_nx^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\left(k\,{}_n\mathrm{C}_k\right)x^{k-1}$

$x=1$을 대입하면 $n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\left(k\,{}_n\mathrm{C}_k\right)$ ……③

①의 양변을 0에서 1까지 적분하면

$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}={}_n\mathrm{C}_0+\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\cdots+\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1}+\cdots+\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$ ……④

②, ③, ④로부터

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{4k^2+2k-1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k&=\sum_{k=0}^{n}\left(4k-2+\frac{1}{k+1}\right){}_n\mathrm{C}_k\\&=4\sum_{k=0}^{n}\left(k\,{}_n\mathrm{C}_k\right)-2\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k+\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}\\&=n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\\&=\frac{n^2\cdot 2^{n+1}-1}{n+1}\end{aligned}$$

따라서 $a_n=n^2\cdot 2^{n+1}-1$

[3]

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$이므로

$f(x)=\sin^2 x+2a\cos x-1$
$\quad =-\cos^2 x+2a\cos x$

$\cos x = t$, $f(x)=g(t)$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$g(t)=-t^2+2at=-(t-a)^2+a^2 \quad (-1 \le t \le 1)$

(i) $0<a<1$일 때,

$g(t)$는 $t=a$에서 최댓값 a^2을 가지므로 $a^2=2$이고,

$a=\pm\sqrt{2}$는 $0<a<1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a \ge 1$일 때,

$g(t)$는 $t=1$에서 최댓값 $-1+2a$를 가지므로 $-1+2a=2$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

$t=-1$일 때 최소이므로, $x=\pi$일 때 $f(x)$의 최솟값은 $f(\pi)=-4$

[4]

(1) $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f''(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{18}{5}$ (변곡점)	↗	0 (극대)	↘	$-\dfrac{9\sqrt[3]{4}}{5}$ (극소)	↗

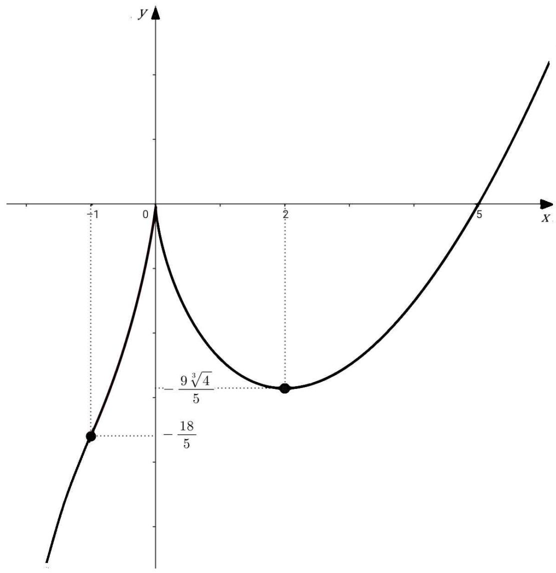
$x=0$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(0)=0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, 극댓값은 0

$f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값은 $-\dfrac{9\sqrt[3]{4}}{5}$

$y=f(x)$의 변곡점의 좌표 $\left(-1,\ -\dfrac{18}{5}\right)$

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$이므로 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$k < -\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}$ 또는 $k > 0$일 때 1개,

$k = -\frac{9\sqrt[3]{4}}{5}$ 또는 $k = 0$일 때 2개,

$-\frac{9\sqrt[3]{4}}{5} < k < 0$일 때 3개