2026학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르고 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1) = 0.6826$$
$$\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2) = 0.9544$$
$$\mathrm{P}(-3 \le Z \le 3) = 0.9974$$

2. 함수 $y=f(x)$에 대하여

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

3. $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

[1] 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a(a>0)$이고 공비가 $r(r>0)$인 등비수열이다. 이때 1보다 큰 정수 p에 대하여 다음 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구하고 $\lim_{n \to \infty} b_n$의 값을 구하시오.(단, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{p^n} = 0$) [12점]

$$\sqrt[p]{a_1},\quad \sqrt[p]{a_1 \sqrt[p]{a_2}},\quad \sqrt[p]{a_1 \sqrt[p]{a_2 \sqrt[p]{a_3}}},\quad \sqrt[p]{a_1 \sqrt[p]{a_2 \sqrt[p]{a_3 \sqrt[p]{a_4}}}},\quad \cdots$$

[2] 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x$가 다음 조건을 만족시킬 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [12점]

(가) a는 정수이다.
(나) 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.
(다) 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$는 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가진다.

[3] 확률변수 K가 정규분포 $\mathrm{N}(5, 9)$를 따를 때, 방정식 $9^x - 8 \cdot 3^x + K + 5 = 0$가 서로 다른 양의 실근을 가질 확률을 구하시오. [12점]

[4] 다음과 같이 주어진 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x) = g(x)\ln x, \qquad g(x) = \begin{cases} e^x & (x > 1) \\ \pi & (x = 1) \\ -x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

(1) $x = 1$에서 함수 $f(x)$의 연속성과 미분가능성을 조사하시오. [6점]

(2) 정적분 $\displaystyle\int_1^e (1+x)f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [8점]

■ 출제 의도

[1] 주어진 수열의 규칙성을 이해하는 능력과 계산을 통해 일반항을 구성할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 주어진 조건을 이해하고 활용하는 능력과 삼차함수를 결정할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] 정규분포와 표준정규분포와의 관계를 이해하고 확률 계산을 할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] (1) 함수의 연속성과 미분가능성의 정의를 이해하고 적용할 수 있는 능력을 평가한다.

(2) 곱의 미분의 활용과 부분적분법의 적용 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

[1] 거듭제곱근의 성질을 활용하여 각 항에서 등비수열의 첫째항과 공비의 지수 변화를 이해하고 이를 수식으로 표현하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] 역함수가 존재하기 위한 조건을 미분과 연관시키고, 삼차방정식의 근에 관한 조건을 활용하면 원하는 계수를 결정할 수 있다. 주어진 함수와 그 역함수 사이의 넓이는 역함수를 구하지 않고 대칭축을 활용하여 해결할 수 있다.

[3] 방정식에 관한 조건으로부터 확률변수의 범위를 찾아내고, 이에 해당하는 확률을 정규분포의 표준화를 통해 해결할 수 있다.

[4] (1) 함수의 연속성은 함숫값과 좌우 극한을, 함수의 미분가능성은 좌우 미분계수를 계산하고 비교하여 각각 해결할 수 있다.

(2) 곱의 미분을 활용하여 적분할 함수를 간단한 형태로 변형시킨 다음 부분적분법을 적용하면 해결할 수 있다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1]	b_n에서 첫째항 a의 지수 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}$을 구하면	3
	b_n에서 공비 r의 지수 $S_n=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots+\frac{n-1}{p^n}$을 구하면	2
	$S_n=\frac{\frac{1}{p^2}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}-\frac{n-1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{n+1}}$과 $b_n=a^{\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}}r^{S_n}$을 구하면	4
	$\lim_{n\to\infty}b_n=a^{\frac{1}{p-1}}r^{\frac{1}{(p-1)^2}}$을 구하면	3
[2]	판별식 $D=4(a^2-9)\le 0$으로부터 $-3\le a\le 3$을 구하면	2
	$a<-2\sqrt{2}$와 $a=-3$을 구하면	4
	$f(x)=f^{-1}(x)$의 근 $x=0,1,2$을 구하면	2
	두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 $\int_0^1\left\|f(x)-f^{-1}(x)\right\|dx+\int_1^2\left\|f(x)-f^{-1}(x)\right\|dx=1$을 구하면	4
[3]	$2<K<11$을 구하면	4
	$\mathrm{P}(-1<Z<2)$를 구하면	4
	$\mathrm{P}(-1<Z<2)=0.8185$를 구하면	4
[4](1)	함숫값 $f(1)=0$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=0$을 구하고 연속성을 언급하면	2
	$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-1$을 구하면	2
	$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=e$를 구하고 미분불가능성을 언급하면	2
[4](2)	$(1+x)e^x=(xe^x)'$을 구하면	4
	$\int_1^e(xe^x)'\ln x\,dx=\left[xe^x\ln x\right]_1^e-\int_1^e e^x dx$를 구하면	2
	$\int_1^e(1+x)f(x)dx=e^{e+1}-e^e+e$를 구하면	2

■ 예시 답안

[1]

$a_n = ar^{n-1}$와 $\sqrt[p]{rs} = \sqrt[p]{r}\sqrt[p]{s}$ 이므로

$b_1 = \sqrt[p]{a_1} = a^{\frac{1}{p}}$,

$b_2 = \sqrt[p]{a_1\sqrt[p]{a_2}} = \sqrt[p]{a_1}\sqrt[p]{\sqrt[p]{a_2}} = a^{\frac{1}{p}}(ar)^{\frac{1}{p^2}} = a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}r^{\frac{1}{p^2}}$,

$b_3 = \sqrt[p]{a_1\sqrt[p]{a_2\sqrt[p]{a_3}}} = \sqrt[p]{a_1}\sqrt[p]{\sqrt[p]{a_2}}\sqrt[p]{\sqrt[p]{\sqrt[p]{a_3}}} = a^{\frac{1}{p}}(ar)^{\frac{1}{p^2}}(ar^2)^{\frac{1}{p^3}} = a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}}r^{\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}}$,

$\cdots$

$b_n = a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n}}r^{\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots\frac{n-1}{p^n}} = a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k}}r^{\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{p^k}}$ $(n \ge 2)$

b_n에서 첫째항 a의 지수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k} = \frac{\frac{1}{p}\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n}{p-1}$

b_n에서 공비 r의 지수를 $S_n = \frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots+\frac{n-1}{p^n}$라고 하면 $\frac{1}{p}S_n = \frac{1}{p^3}+\frac{2}{p^4}+\cdots+\frac{n-2}{p^n}+\frac{n-1}{p^{n+1}}$이므로

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)S_n = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots+\frac{1}{p^n}-\frac{n-1}{p^{n+1}} = \frac{\frac{1}{p^2}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{p}}-\frac{n-1}{p^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{p^2}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}-\frac{n-1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{n+1}}$$

따라서 $b_n = a^{\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}}r^{S_n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p^n} = 0$을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}b_n = \lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}}r^{S_n} = a^{\frac{1}{p-1}}r^{\frac{1}{(p-1)^2}}$$

[2]

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 조건 (나)를 성립하려면 일대일대응이어야 한다. 증가함수는 일대일대응이므로 모든 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2+2ax+3 \ge 0$

판별식 $D = 4(a^2-9) \le 0$, 즉 $-3 \le a \le 3$

(ⅱ) 조건 (다)에서 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x) = x$의 근과 일치한다.

$f(x)-x = x^3+ax^2+2x = x(x^2+ax+2)$이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가지려면,

방정식 $x^2+ax+2 = 0$는 서로 다른 양의 근을 가져야한다.

이를 위해서는 y절편이 2이므로 대칭축 $-\frac{a}{2} > 0$이고 판별식 $D = a^2-8 > 0$

즉 $a < -2\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ) 그리고 조건 (가)로부터 $a = -3$

$f(x)-x = x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2) = 0$의 근은 $x = 0, 1, 2$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^1 |f(x)-f^{-1}(x)|dx+\int_1^2 |f(x)-f^{-1}(x)|dx$$
$$=2\int_0^1 (f(x)-x)dx+2\int_1^2 (x-f(x))dx$$
$$=2\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx+2\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=2\left(\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2\right)=2\left(\frac{1}{4}-\frac{15}{4}+7-3\right)=1$$

[3]

$3^x=t$, $f(t)=t^2-8t+K+5$라고 하자. 그리고 $x>0$이면 $t>1$

주어진 방정식이 서로 다른 양의 실근을 가진다면 방정식 $f(t)=0$은 $t>1$에서 서로 다른 두 근을 가진다.

이를 위해서 다음 두 조건이 만족되어야 한다.

(ⅰ) $f(1)=K-2>0$ (ⅱ) $f(4)=K-11<0$ ($t=4$는 대칭축)

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터 $2<K<11$

확률변수 $Z=\dfrac{K-5}{3}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(2<K<11)=\mathrm{P}\left(\frac{2-5}{3}<Z<\frac{11-5}{3}\right)=\mathrm{P}(-1<Z<2)$$
$$=\mathrm{P}(-1<Z<0)+\mathrm{P}(0<Z<2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

[4]

(1) (연속성)

(ⅰ) 함숫값 $f(1)=g(1)\ln 1=0$

(ⅱ) 좌극한 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x\ln x)=0$, 우극한 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}e^x\ln x=0$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속

(미분가능성)

(ⅰ) $$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-(1+h)\ln(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{-(1+h)\}\lim_{h\to 0-}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=-\ln e=-1$$

(ⅱ) $$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}e^{1+h}\frac{\ln(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}e^{1+h}\lim_{h\to 0+}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=e\ln e=e$$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2) $$\int_1^e (1+x)f(x)dx=\int_1^e (1+x)e^x\ln x\,dx=\int_1^e (xe^x)'\ln x\,dx$$
$$=[xe^x\ln x]_1^e-\int_1^e e^x dx=e^{e+1}-e^e+e$$