[2026학년도 논술고사 자연계열 1교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분, 확률과통계
	핵심개념 및 용어	집합, 이항정리, 도형의이동, 도함수, 정적분
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호로

   $n(A)$

   와 같이 나타낸다. 특히 $n(\varnothing)=0$이다.

2. n이 자연수일 때,

   $$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

3. 점 (a,b)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,-b)$

4. 미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서
   ① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.
   ② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

[1] 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$의 두 부분집합 A,B가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [10점]

(가) $n(A)\times n(B)\neq 0$
(나) $n(B)<n(U)$
(다) $A\subset B$

[2] 세 점 $\mathrm{A}(-1,-1), \mathrm{B}(1,-1), \mathrm{C}(1,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 이 삼각형을 원점에 대하여 대칭이동한 삼각형 $\mathrm{A'B'C'}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이를 구하시오. [6점]

(2) 두 삼각형 중 한 삼각형을 고정하고 다른 삼각형을 x축의 양의 방향 또는 음의 방향으로 평행이동할 때, 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이의 최댓값을 구하시오. [14점]

[3] 실수 k에 대하여 $S(k)=\int_0^1 |x^3+k|\,dx$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $S(k)$를 구하시오. [10점]

(2) 함수 $S(k)$가 최소가 되게 하는 k의 값과 함수 $S(k)$의 최솟값을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

[1] 집합의 정의를 이해하고 원소의 개수와 집합의 포함관계를 적용할 수 있는 능력을 평가한다. 또한 이항정리를 적용하여 조건에 맞는 부분집합의 개수를 구하는 능력을 평가한다.

[2] (1) 점의 대칭이동과 주어진 도형의 넓이를 구하는 능력을 평가한다.
(2) 도형의 평행이동과 위치관계를 이해하고 주어진 조건을 이용하여 원하는 도형의 넓이를 수식으로 정확히 구성하는 능력을 평가한다.

[3] (1) 정적분의 개념을 이해하고 구간에 따른 정적분을 계산하는 능력을 평가한다.
(2) 도함수를 활용하여 주어진 함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취 기준
제시문 1	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산-④ 집합
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취 기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 2</td><td>교육과정</td><td>[확통]-(1) 경우의 수-2 이항정리</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 3</td><td>교육과정</td><td>[수학]-(2) 기하-4 도형의 이동</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 4</td><td>교육과정</td><td>[수학II]-(2) 미분-3 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 [1]</td><td>교육과정</td><td>[수학]-(3) 수와 연산-4 집합
[확통]-(1) 경우의 수-2 이항정리</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
[10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.
[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 [2]-(1)</td><td>교육과정</td><td>[수학]-(2) 기하-4 도형의 이동</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 [2]-(2)</td><td>교육과정</td><td>[수학]-(2) 기하-4 도형의 이동</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 [3]-(1)</td><td>교육과정</td><td>[수학II]-(3) 적분-2 정적분</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항 [3]-(2)</td><td>교육과정</td><td>[수학II]-(2) 미분-3 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행 연도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="4">고등학교 교과서</td><td>수학</td><td>홍성복 외</td><td>지학사</td><td>2018</td><td>176~187, 153~161</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>이준열 외</td><td>천재교육</td><td>2018</td><td>78~90</td></tr>
<tr><td>미적분</td><td>황선욱 외</td><td>미래엔</td><td>2018</td><td>137~142</td></tr>
<tr><td>확률과통계</td><td>고성은 외</td><td>좋은책신사고</td><td>2018</td><td>27~30</td></tr>
</table>

5. 문항 해설

[1] 전체집합에서 조건에 맞는 부분집합을 정의하고, 집합의 포함관계와 이항정리를 이용하여 경우의 수를 구하는 문항이다.

[2] (1) 점의 원점대칭을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구하는 문항이다.
(2) 도형을 좌표평면 위로 대응하고, 평행이동과 위치관계를 이용하여 문제에서 요구하는 도형의 넓이를 수식으로 구하고, 도함수를 이용하여 함수의 최댓값을 구하는 문항이다.

[3] (1) 함수의 모양에 따라 구간을 나누고 구간별로 정적분을 구하는 문항이다.
(2) 도함수를 이용하여 주어진 함수의 최솟값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	집합 A (공집합 제외)와 집합 B (공집합과 전체집합 제외)의 조건을 구했으면	2
	두 집합의 포함관계를 이용하여 각각의 경우의 수를 구했으면 (이항정리를 이용하거나 직접 계산한 경우 모두 인정)	6
	조건의 경우의 수 602를 구했으면	2
2-1	대칭이동한 세 점을 $\mathrm{A}'(1,1), \mathrm{B}'(-1,1), \mathrm{C}'(-1,-3)$ 구했으면	4
	겹치는 영역의 넓이 2를 구했으면	2
2-2	두 삼각형을 좌표평면으로 대응하고 평행이동에 따른 변수를 설정했으면	4
	구간에 따라 겹치는 영역을 설정한 변수의 함수로 표현하면 (평행이동에 따라 변하는 영역의 넓이를 함수로 표현하면 부분 점수 인정)	6

	겹치는 영역의 최대값 $\frac{5}{2}$을 구했으면 (도함수 또는 완전제곱 형태 계산 모두 인정)	4
3-1	$y=x^3+k$의 근 $x=-\sqrt[3]{k}$에 따라 함수 $S(k)$의 구간을 나누면	2
	각 구간의 적분을 계산하여 구간에 따른 함수 $S(k)$를 구하면	6
	전체 구간에 대한 함수 $S(k)$를 구하면	2
3-2	구간을 나눠 각 구간의 최솟값을 구하면	4
	$-1<k<0$일 때, 최솟값 $\frac{7}{32}$을 구하면	4
	함수 $S(k)$가 최소가 되는 $k=-\frac{1}{8}$과 최솟값 $\frac{7}{32}$을 구하면	2

7. 예시 답안

[1]

조건 (가)와 (나)에 의하여 부분집합 B는 공집합과 전체집합을 포함하지 않는다.

$n(B)=k\,(1\le k\le 5)$일 때, 가능한 집합 B의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_k$이고,

그 각각에 대하여 집합 A의 개수는 조건 (가)와 (다)에 의하여 공집합을 제외한 2^k-1

따라서 세 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_1\times(2^1-1)+{}_6\mathrm{C}_2\times(2^2-1)+\cdots+{}_6\mathrm{C}_5\times(2^5-1)\\&\quad=({}_6\mathrm{C}_1\times2^1+{}_6\mathrm{C}_2\times2^2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_5\times2^5)-({}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_5)\end{aligned}$$

이항정리를 이용하면,

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_1\times2^1+{}_6\mathrm{C}_2\times2^2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_5\times2^5\\&\quad=({}_6\mathrm{C}_0\times2^0+{}_6\mathrm{C}_1\times2^1+{}_6\mathrm{C}_2\times2^2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_5\times2^5+{}_6\mathrm{C}_6\times2^6)-({}_6\mathrm{C}_0\times2^0+{}_6\mathrm{C}_6\times2^6)\\&\quad=(1+2)^6-(1+64)=664\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 + \ \cdots\ + {}_6\mathrm{C}_5 &= ({}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 + \ \cdots\ + {}_6\mathrm{C}_5 + {}_6\mathrm{C}_6) - ({}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_6) \\
&= (1+1)^6 - (1+1) = 62
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 경우의 수는 $664 - 62 = 602$

(다른 풀이)

$n(B) = 1$인 집합 B의 개수 ${}_6C_1 = 6$ → 집합 A의 개수 $2^1 - 1 = 1$

$n(B) = 2$인 집합 B의 개수 ${}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ → 집합 A의 개수 $2^2 - 1 = 3$

$n(B) = 3$인 집합 B의 개수 ${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ → 집합 A의 개수 $2^3 - 1 = 7$

$n(B) = 4$인 집합 B의 개수 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ → 집합 A의 개수 $2^4 - 1 = 15$

$n(B) = 5$인 집합 B의 개수 ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$ → 집합 A의 개수 $2^5 - 1 = 31$

따라서 구하는 경우의 수는
$6 \times 1 + 15 \times 3 + 20 \times 7 + 15 \times 15 + 6 \times 31 = 602$

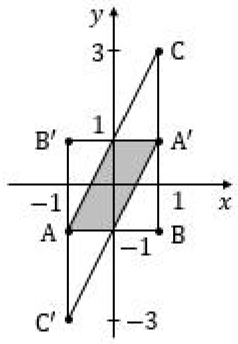
[2]

(1) 원점을 중심으로 대칭이동한 세 점은

$A'(1,1)$, $B'(-1,1)$, $C'(-1,-3)$

두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이는

평행사변형의 넓이이므로 $1\times 2=2$



(2) 삼각형 ABC를 고정하고, 삼각형 $A'B'C'$을 x축 방향으로 평행이동하여 영역의 넓이를 구한다.

점 A'의 좌표를 $A'(a,1)$이라 하면, 두 삼각형이 겹치는 경우는 $0<a<3$이므로

(i) $0<a\le 1$일 때

그림 (a)에서 평행사변형의 넓이 $S=a\times 2\le 2$

(ii) $1<a\le 2$일 때

그림 (b)에서 겹치는 영역의 넓이 S는 점 A와 점 A'을 대각선 양 끝점으로 하는 평행사변형의 넓이에서 양쪽 모서리 삼각형의 넓이를 뺀 것이므로

$S=(a\times 2)-2\times\left\{\frac{1}{2}\times(a-1)\times 2\times(a-1)\right\}=-2a^2+6a-2$

$S'=-4a+6=0$에서 $a=\frac{3}{2}$

이때, 최댓값은 $S\left(\frac{3}{2}\right)=-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+6\times\left(\frac{3}{2}\right)-2=\frac{5}{2}$

(참고, $S=-2a^2+6a-2=-2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$에서 $a=\frac{3}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}$)

(iii) $2<a<3$일 때

그림 (c)에서 직사각형의 넓이 $S=(3-a)\times 2\le 2$

(참고, 삼각형 $A'B'C'$을 고정하고 삼각형 ABC를 평행이동하여 같은 방법으로 구할 수 있다.)

(i),(ii),(iii)으로부터 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{2}$

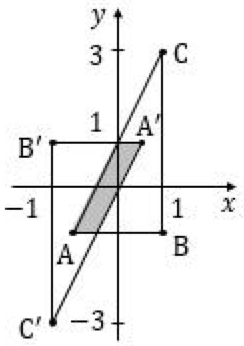


그림 (a)

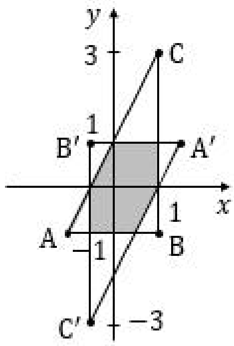


그림 (b)

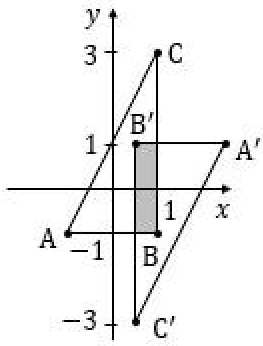


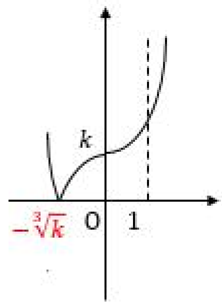
그림 (c)

[3]

(1) $y=x^3+k$의 x절편은 $x=\sqrt[3]{-k}=-\sqrt[3]{k}$이므로
$x=-\sqrt[3]{k}$가 적분구간 $[0,1]$에 속하는 경우와 속하지 않는 경우로 나누어 $S(k)$를 구한다.

(ⅰ) $-\sqrt[3]{k}\le 0$에서 $k\ge 0$일 때

$$S(k)=\int_0^1 (x^3+k)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+kx\right]_0^1=k+\frac{1}{4}$$

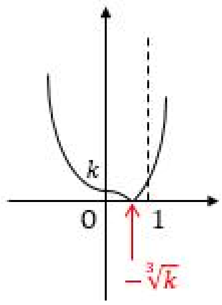


(ⅱ) $0<-\sqrt[3]{k}<1$에서 $-1<k<0$일 때

$$S(k)=\int_0^{-\sqrt[3]{k}}(-x^3-k)dx+\int_{-\sqrt[3]{k}}^1 (x^3+k)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-kx\right]_0^{-\sqrt[3]{k}}+\left[\frac{1}{4}x^4+kx\right]_{-\sqrt[3]{k}}^1$$

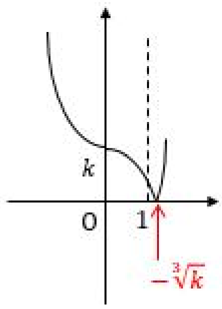
$$=\frac{3}{2}k\sqrt[3]{k}+k+\frac{1}{4}$$



(ⅲ) $-\sqrt[3]{k}\ge 1$에서 $k\le -1$일 때

$$S(k)=\int_0^1 (-x^3-k)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4-kx\right]_0^1=-k-\frac{1}{4}$$

따라서 $S(k)=\begin{cases} -k-\dfrac{1}{4} & (k\le -1) \\ \dfrac{3}{2}k\sqrt[3]{k}+k+\dfrac{1}{4} & (-1<k<0) \\ k+\dfrac{1}{4} & (k\ge 0) \end{cases}$



(2) 각 구간에서 $S(k)$의 최솟값을 구하면,

(ⅰ) $k\le -1$일 때

$S(k) = -k - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$

(ii) $-1 < k < 0$일 때

$S(k) = \frac{3}{2}k\sqrt[3]{k} + k + \frac{1}{4}$ 이므로 $S'(k) = 2\sqrt[3]{k} + 1 = 0$에서 $k = -\frac{1}{8}$이고,

$k = -\frac{1}{8}$의 좌우에서 $S'(k)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$k = -\frac{1}{8}$에서 극소이고 최솟값은 $\frac{7}{32}$

(참고, $S''(k) = \frac{2}{3\sqrt[3]{k^2}}$ 에서 $S''\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6} > 0$이므로 극소)

(iii) $k \geq 0$일 때

$S(k) = k + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)으로부터 $k = -\frac{1}{8}$일 때 $S(k)$의 최솟값은 $\frac{7}{32}$

[2026학년도 논술고사 자연계열 1교시 2번]

1. 일반정보

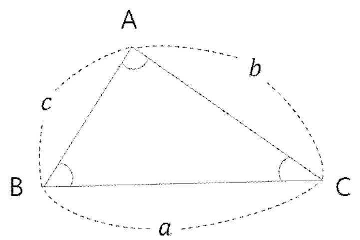
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수의 덧셈정리, 복소수, 미분법
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

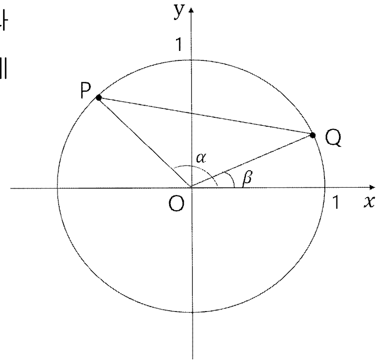


2. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (단, x의 단위는 라디안)

3. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[1] 오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{Q}(\cos\beta, \sin\beta)$라 하자. 다음 물음에 답하시오.



(1) 코사인함수의 덧셈정리 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$를 증명하시오. [8점]

(2) (1)의 식을 이용하여 $(\cos x)' = -\sin x$를 증명하시오. [8점]

[2] 실수 a와 자연수 b에 대하여 $z=(1+i)^{2025}+a(i-1)^{2026}$이 실수가 되게 하는 a의 값을 구하고, 그때의 z에 대하여 $\log_b z$가 자연수가 되게 하는 b의 개수를 구하시오. [12점]

[3] 직선 $y=ax$와 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$는 원점과 원점이 아닌 점 P에서 만난다. 점 $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, a는 -7과 1이 아닌 실수)

(1) 삼각형 OPQ의 넓이를 $f(a)$라 할 때, 함수 $f(a)$를 구하시오. [10점]

(2) 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구하시오. [12점]

3. 출제 의도

[1] (1) 코사인함수의 덧셈정리를 증명하기 위하여 제시문에 주어진 코사인법칙을 주어진 그림 속의 삼각형에 적용하고, 이를 토대로 명확한 논리적 추론과 계산력으로 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.
(2) 삼각함수의 미분법을 얻기 위해서 미분의 정의를 삼각함수에 적용하고 앞에서 증명한 수학적 사실을 적절하게 적용할 수 있는 능력을 평가한다. 미분법을 위한 극한 계산의 중간 과정에서 필요한 문제 해결력을 평가한다.

[2] 복소수의 사칙연산에 관한 계산력을 평가한다. 복소수가 실수가 되기 위한 조건을 이해하고 있는지를 알아보고자 한다. 로그의 뜻을 이해하고 문제에 적용할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] (1) 문제의 진술을 토대로 원, 직선과 점의 기하학적인 위치 관계를 제대로 파악하고 있는지를 평가한다. 이를 토대로 요구되는 삼각형의 넓이를 식으로 구성할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 미분을 사용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는 계산력과 개념의 이해력을 평가한다. 이를 토대로 함수의 증가와 감소에 대해 종합적인 표로 나타낼 수 있는 표현력과 구성 능력도 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학I]-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문2	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학I]-(2) 삼각함수-$\boxed{1}$ 삼각함수 [미적분]-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-$\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-$\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식 [수학I]-(1) 지수함수와 로그함수-$\boxed{1}$ 지수와 로그
	성취기준	[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학II]-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	54, 135
	수학 I	권오남 외	교학사	2025	30, 101
	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2024	80
	미적분	황선욱 외	미래앤	2020	65, 73, 76
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 문제에서 주어진 그림에서 나타나는, 삼각형에 대해 제시문의 코사인법칙 적용으로 선분의 길이를 계산하고 이를 두 점 간의 거리의 식과 비교함으로써 코사인함수의 덧셈정리를 증명할 수 있다.

(2) 코사인함수에 미분의 정의를 적용하고, (1)에서 증명한 코사인함수의 덧셈정리를 이 미분 정의에 적용하여 극한의 식을 계산해 나가면, 결론인 미분법을 얻기 위해 꼭 필요한 보조 극한 문제를 명료하게 하고 이를 해결할 수 있다.

[2] 복소수에 대한 사칙연산을 계산할 수 있는 능력을 토대로 복소수가 실수로 되기 위한 조건을 이해하여 필요한 정보를 얻을 수 있다. 로그의 뜻을 이해하고 지수로의 표현을 통해 원하는 두 변수 간의 관계를 구할 수 있으며 자연수의 개수를 계산할 수 있다.

[3] (1) 문제에 주어진 조건을 파악하여 두 점 간의 거리, 점과 직선 간의 거리를 구할 수 있다. 이를 바탕으로 삼각형의 넓이를 함수의 형태로 구할 수 있다.

(2) 함수의 미분을 통해 함수가 어느 구간에서 증가와 감소인지를 판정할 수 있다. 이를 표로 구성하는 표현을 통해 함수의 극값에 구할 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) (8점)	코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 2-2\cos(\alpha-\beta)$을 보이면	2
	두 점 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$을 보이면	2
	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$을 보이면	2
	β 대신 $-\beta$를 대입하여 정리하면 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$을 보이면	2
[1](2) (8점)	$(\cos x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ 을 보이면	2
	$(\cos x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$ 을 보이면	2
	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin^2 h}{h^2}\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{(\cos h+1)}=0$을 보이면	4

하위 문항	채점 기준	배점
[2] (12점)	$z=2^{1012}(1+i-2ai)$을 구하면	4
	$a=\frac{1}{2}$을 구하고 $z=2^{1012}=2^{2^2\times 11\times 23}$을 보이면	4
	두 자연수의 관계 $b=2^{\frac{2^2\times 11\times 23}{p}}$을 보이고 b의 개수 $3\times 2\times 2=12$개를 구하면	4
[3](1) (10점)	$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{2\lvert a-1\rvert}{\sqrt{a^2+1}}$ 혹은 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$을 구하면	4
	$\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$와 직선 $y=ax$와의 거리 $\frac{\lvert a+7\rvert}{2\sqrt{a^2+1}}$을 구하면, 혹은 $\mathrm{P}\left(\frac{-2(a-1)}{a^2+1},\ \frac{-2a(a-1)}{a^2+1}\right)$와 직선 $y=-7x$와의 거리 $\frac{2\lvert(a-1)(a+7)\rvert}{5\sqrt{2}(a^2+1)}$을 구하면	4
	$f(a)=\frac{\lvert(a-1)(a+7)\rvert}{2(a^2+1)}$ (단, $a\neq 1,\ -7$)을 구하면	2
[3](2) (12점)	$f(a)=\lvert g(a)\rvert$라 놓고 $g'(a)=\frac{-(3a+1)(a-3)}{(a^2+1)^2}$을 구하면	4
	$a=-\frac{1}{3}$에서 $f(a)$의 극댓값은 4, $a=3$에서 $f(a)$의 극댓값은 1	4
	함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면	4

7. 예시 답안

[1]

(1) 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2-2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos(\angle\mathrm{POQ})$$

이고 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\angle\mathrm{POQ}=\alpha-\beta$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=1+1-2\times 1\times 1\times\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

이다. 또, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

이므로

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \ \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. ①에 β 대신 $-\beta$를 대입하여 정리하면

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(2) $(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$

$= \cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$

제시문에서 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\times\lim_{h\to 0}\frac{h}{(\cos h+1)}=0$$

따라서

$$(\cos x)'=-\sin x$$

[2]

$$z=(1+i)^{2025}+a(i-1)^{2026}=(1+i)^{2025}+a(1-i)^{2026}$$

$1+i=\alpha$, $1-i=\beta$라고 하면 α, β는 $x^2-2x+2=0$의 두 근이다.

$$x^4=x^{2\times 2}=(2x-2)^2=2^2(x^2-2x+1)=-2^2$$

$$x^8=2^4$$

이므로 다음을 얻는다.

(참고. $(1+i)^8=(i-1)^8=2^4$을 직접 계산해도 됨.)

$$(1+i)^{2025}=\alpha^{8\times 253+1}=2^{1012}\alpha=2^{1012}(1+i)$$

$$(1-i)^{2026}=\beta^{8\times 253+2}=2^{1012}\beta^2=2^{1012}(-2i)$$

이로부터

$$z=2^{1012}(1+i-2ai)$$

z가 실수가 되게 하는 a는 $\frac{1}{2}$이며 그때 $z=2^{1012}=2^{2^2\times 11\times 23}$

$\log_b 2^{2^2\times 11\times 23}=p$라 놓으면

$$\log_b z=\log_b 2^{2^2\times 11\times 23}=p \quad\Leftrightarrow\quad b=2^{\frac{2^2\times 11\times 23}{p}}$$

b가 자연수이면서 p도 자연수가 되려면 p는 $2^2\times 11\times 23(=1012)$의 약수이면 된다.

b의 개수는 $2^2\times 11\times 23(=1012)$의 약수의 개수와 같다.

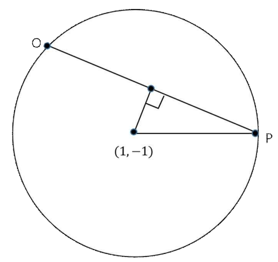
(참고. 2^2의 약수: $1, 2, 2^2$, 11의 약수: $1, 11$, 23의 약수: $1, 23$을 이용하여 약수의 개수를 구한다.)

$2^2\times 11\times 23(=1012)$의 약수의 개수는 $3\times 2\times 2=12$개

따라서 b의 개수는 $3\times 2\times 2=12$개

[3]

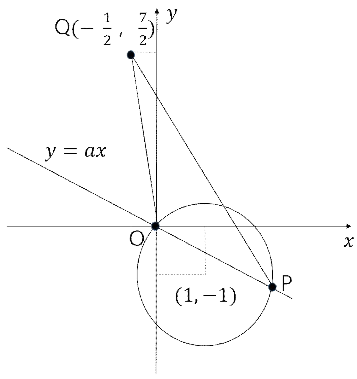
(1) 삼각형 OPQ의 넓이 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}} \times$(점 Q와 직선 $y=ax$와의 거리) …… ①



$\overline{\mathrm{OP}}$는 오른쪽 그림과 같이 점과 직선과의 거리 공식과 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있다. 원의 중심 $(1,\,-1)$과 직선 $y=ax$와의 거리는 $\dfrac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}} = 2\sqrt{2-\frac{(a+1)^2}{a^2+1}} = \frac{2|a-1|}{\sqrt{a^2+1}} \;\cdots\cdots ②$$

(참고. 직선 $y=ax$와 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$의 교점을 구하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 거리를 구해도 됨)



점 $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\,\dfrac{7}{2}\right)$와 직선 $y=ax$와의 거리는 $\dfrac{|a+7|}{2\sqrt{a^2+1}}$ …… ③

②와 ③을 ①에 대입하면 삼각형 OPQ의 넓이, 즉 $f(a)$를 얻는다.

$$f(a) = \frac{|(a-1)(a+7)|}{2(a^2+1)} \quad (\text{ 단, } a \neq 1,\,-7\ )$$

([3] (1)의 다른 풀이)

삼각형 OPQ의 넓이 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ}} \times$(점 P와 직선 $y=-7x$와의 거리) …… ④

$$\overline{\mathrm{OQ}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;\cdots\cdots ⑤$$

$y=ax$와 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$의 교점을 구하면 원점과 점$\mathrm{P}\left(\dfrac{-2(a-1)}{a^2+1},\dfrac{-2a(a-1)}{a^2+1}\right)$이다.

점 P와 직선 $y=-7x$와의 거리는 $\dfrac{2|(a-1)(a+7)|}{5\sqrt{2}(a^2+1)}$ …… ⑥

⑤와 ⑥을 ④에 대입하면 $f(a) = \dfrac{|(a-1)(a+7)|}{2(a^2+1)}$ (단, $a \neq 1,\,-7$)

(2) $g(a) = \dfrac{(a-1)(a+7)}{2(a^2+1)}$라고 하자.

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{(2a+6)(a^2+1)-(a^2+6a-7)2a}{2(a^2+1)^2} = \frac{-(3a^2-8a-3)}{(a^2+1)^2} \\ &= \frac{-(3a+1)(a-3)}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$

$f(a) = |g(a)|$이므로

$a=-\dfrac{1}{3}$에서 $g(a)$는 극소이며 $f(a)$는 극대이고 극댓값은 4

$a=3$에서 $g(a)$와 $f(a)$는 극대이고 극댓값은 1

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

a	$\cdots$	(-7)	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(a)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(a)$	↘		↗	4	↘		↗	1	↘

(참고. $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.)