[2026학년도 논술고사 자연계열 2교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	수열, 수열의 합, 이차함수, 표본평균, 조합
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. ① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   ② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   ③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

2. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉 $ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$의 실근과 같다.

3. 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 경우, 크기가 n인 표본을 임의 추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

[1] $\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k^2$의 값을 구하시오. [8점]

[2] x에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 + 2(k+1)x + k + 3$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 실수 k값에 관계없이 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 지나는 점의 좌표를 구하시오. [8점]

(2) 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(-1, 1), \mathrm{B}(3, 5)$를 잇는 선분 AB와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k값의 범위를 구하시오. [12점]

[3] 평행한 두 직선 l과 m위에 각각 5개의 점과 7개의 점이 그림 (a)와 같이 놓여 있다. 직선 l위의 점과 직선 m위의 점을 연결하여 서로 다른 세 개의 선분을 그을 때, 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하시오. (단, 선분의 시작점이나 끝점에서 두 선분이 만나는 경우는 교차하지 않는 것으로 본다. 예를 들어 그림 (b)는 교차하지 않는 경우이고 그림 (c)는 교차하는 경우이다.) [12점]

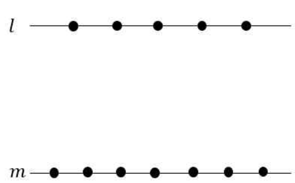


그림 (a)

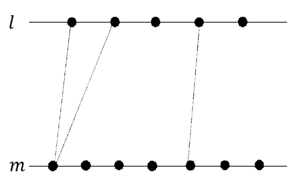


그림 (b)

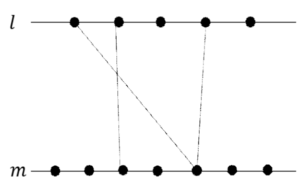


그림 (c)

[4] K회사에서 생산하는 향수에 들어 있는 천연 성분의 무게는 평균 150㎎, 표준편차 5㎎인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 향수 중에서 임의 추출한 100개의 향수에 들어 있는 천연 성분의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 300 - 5k) \leq 0.98$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = 0.96$) [10점]

3. 출제 의도

[1] $\sum$의 의미를 이해하고 기본적인 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[2] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.
[3] 조합의 의미를 이해하고 조합을 수를 구할 수 있는지 평가한다.
[4] 표본평균과 모평균의 관계를 활용하여 간단한 부등식 문제를 풀 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학I]-(3) 수열-② 수열의 합
	성취기준	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-⑤ 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

제시문3	교육과정	[확통]-(3) 통계-2 통계적 추정
	성취기준	표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.
문항 [1]	교육과정	[수학I]-(3) 수열-2 수열의 합
	성취기준	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-2 나머지정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-5 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [3]	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계-2 순열과 조합
	성취기준	[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
문항 [4]	교육과정	[확통]-(3) 통계-2 통계적 추정
	성취기준	표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식 외	동아출판	2024	131
	수학	김원경 외	비상교육	2023	61
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2025	121
기타					

5. 문항 해설

[1] 식을 변형한 후 제시문에 주어진 공식을 활용하여 식의 값을 구할 수 있다.
[2] 주어진 식을 k에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 활용한다.
[3] 두 직선에서 점들의 조합을 먼저 선택한 후 서로 교차하지 않는 선분의 수를 구할 수 있다.
[4] 표본평균이 따르는 분포를 제시문을 활용하여 변형한 후 문제를 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$\sum_{k=m}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2$을 활용하거나 계산의 상당 부분을 올바로 계산한 경우	3
	정답 2925를 얻으면	5

하위 문항	채점 기준	배점
[2](1)	주어진 식을 k에 대해 정리하여 $(2x+1)k+x^2+2x+3-y=0$을 얻으면	3
	정답 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$을 올바로 구하면	5
[2](2)	$k \le 1$과 $k \ge -\frac{13}{7}$을 얻으면	3
	$k > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$을 얻으면	3
	$-\frac{7}{2} < k < \frac{1}{2}$을 얻으면	3
	$-\frac{13}{7} \le k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$을 얻으면	3
[3]	예시 답안과 같이 계산에 필요한 경우들을 올바로 분류한 경우	4
	각 분류한 경우들에 대해 거의 대부분 올바로 계산한 경우	4
	2135를 얻으면	4
[4]	표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다는 것을 제시하면	2
	식을 올바로 변형하여 $300-10k \ge -2.05$	5
	자연수 k의 최댓값은 30을 얻으면	3

7. 예시 답안

[1] $\sum_{k=m}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k^2 = \sum_{m=1}^{9}\left(\sum_{k=m}^{10} k^2\right) = \sum_{m=1}^{9}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{9}\left\{\frac{10\times 11\times 21}{6} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right\}$$

$$= \sum_{m=1}^{9}\left\{\frac{2310-2m^3+3m^2-m}{6}\right\} = \frac{1}{6}\left\{2310\times 9 - 2\times\left(\frac{9\times 10}{2}\right)^2 + 3\times\frac{9\times 10\times 19}{6} - \frac{9\times 10}{2}\right\}$$

$$= 2925$$

다른풀이

$$
\begin{array}{l}
1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2 \\
\quad +2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2 \\
\qquad\quad +3^2+\cdots+9^2+10^2 \\
\qquad\qquad\quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad +9^2+10^2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$1^2+2^3+3^3+\cdots+9^3+9\times 10^2 = \sum_{k=1}^{9} k^3+900=\left(\frac{9\times 10}{2}\right)^2+900=2925$$

[2]

(1) $y=f(x)=x^2+2(k+1)x+k+3$을 k에 대하여 정리하면

$(2x+1)k+x^2+2x+3-y=0$

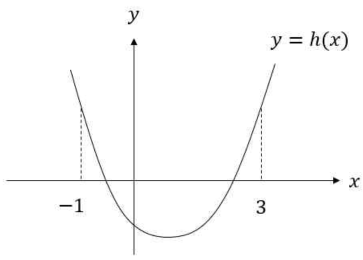
$2x+1=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$, $\quad x^2+2x+3-y=0$에서 $y=\frac{9}{4}$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

(2)

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=x+2$이다.

$g(x)=x+2$, $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(x)$의 그래프가 선분 AB와 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차함수 $h(x)=x^2+(2k+1)x+k+1$의 그래프의 개형이 오른쪽과 같아야 한다.



따라서

(i) $h(-1)\ge 0$에서 $-k+1\ge 0$ $\therefore$ $k\le 1$

(ii) $h(3)\ge 0$에서 $7k+13\ge 0$ $\therefore$ $k\ge -\frac{13}{7}$

(iii) 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$D>0$에서 $D=(2k+1)^2-4(k+1)=4k^2-3>0$ $\therefore$ $k>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

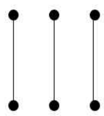
(iv) $h(x)$의 축의 방정식이 $x=-\frac{2k+1}{2}$이므로 $-1<-\frac{2k+1}{2}<3$ $\therefore$ $-\frac{7}{2}<k<\frac{1}{2}$

(i),(ii),(iii),(iv)의 공통 범위를 구하면 $-\frac{13}{7}\le k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[3]

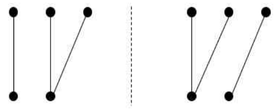
(i) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3\times {}_7\mathrm{C}_3=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}\times\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=350$$



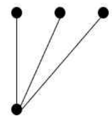
(ⅱ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times 2 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}\times2 = 420$$



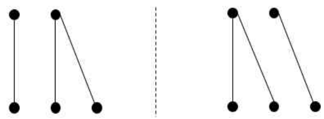
(ⅲ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_7\mathrm{C}_1 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times7 = 70$$



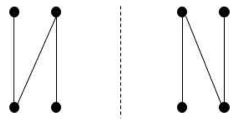
(ⅳ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3 \times 2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times2 = 700$$



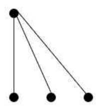
(ⅴ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times 2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}\times2 = 420$$



(ⅵ) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_3 = 5\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 175$$



$\therefore\ 350+420+70+700+420+175=2135$

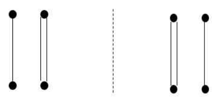
다른 풀이

선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수는 ${}_5H_3 \times {}_7H_3 = {}_{5+3-1}C_3 \times {}_{7+3-1}C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 2940$

이 경우 중 서로 다른 선분의 수가 3개가 아닌 경우는 다음과 같다.

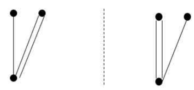
(ⅰ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times 2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}\times2 = 420$$



(ⅱ) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_1 \times 2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times7\times2 = 140$$

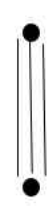


(ⅲ) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times 2 = 5\times\frac{7\times6}{2\times1}\times2 = 210$$

(ⅳ) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_1 = 5\times7 = 35$$



$\therefore\ 2940-(420+140+210+35)=2135$

[4]

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150, 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150, \dfrac{5^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(150, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다. 이때 $\overline{X}$를 $Z = \dfrac{\overline{X} - 150}{1/2}$로 나타내면 Z는 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 300 - 5k) \leq 0.98$에서

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 300 - 5k) = \mathrm{P}(Z \geq 300 - 10k) = \mathrm{P}(300 - 10k \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$

$= \mathrm{P}(300 - 10k \leq Z \leq 0) + 0.5 \leq 0.98$

$\therefore \mathrm{P}(300 - 10k \leq Z \leq 0) \leq 0.48$ ……①

이때 $\mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = 0.96$이므로

$\mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = \mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.05) = 2 \times \mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 0) = 0.96$

$\therefore \mathrm{P}(-2.05 \leq Z \leq 0) = 0.48$ ……②

①,②에서 $300 - 10k \geq -2.05$

$10k \leq 302.05$ $\quad \therefore k \leq 30.205$

자연수 k의 최댓값은 30

[2026학년도 논술고사 자연계열 2교시 2번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	이차방정식, 수열의 극한, 미분법, 적분법
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 함수 $f(t)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

3. 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$f(x) \le g(x) \text{이면 } \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

[1] 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, $a_1 = 2$)

$$a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n, \qquad a_n b_n = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{(2+\sqrt{3})^{2n} - (2-\sqrt{3})^{2n}\right\}$$

(1) a_n과 b_n을 구하시오. [10점]

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n\left(a_n^2 - 3b_n^2\right)}{a_n}$의 값을 구하시오. [8점]

[2] 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)-1=0$의 근을 구하시오.
(단, $0 \le x < 2\pi$) [14점]

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt = x-\cos x+\frac{3}{2}$$

[3] 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(x)>0$이고 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

(가) $f(0)=1$

(나) $f(x) \le 2f'(x)$

(다) $\{f(x)\}^2 \le \int_0^x \{f(t)\}^2 dt+1$

(1) $\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt = \{f(x)\}^2-1$이 성립함을 보이시오. [6점]

(2) 함수 $f(x)$를 구하시오. [12점]

3. 출제 의도

[1] (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 등비수열이 수렴하도록 하는 조건을 확인하여 수열의 극한값을 구할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 방정식의 양변을 미분할 수 있는지를 평가한다. 함수의 곱의 미분법과 여러 가지 적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는 능력을 평가한다. 또 삼각함수가 포함된 방정식의 근을 구할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] (1) 합성함수의 미분법과 정적분의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 정적분과 부등식에 대한 성질을 이용하여 정적분이 포함된 등식을 구할 수 있는 능력을 평가한다. 정적분과 미분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 학습내용 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학II]-(3) 적분-2 정적분
	성취기준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
제시문2	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문3	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-2 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식-4 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한-1 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-1 여러 가지 적분법 [수학I]-(2) 삼각함수-1 삼각함수
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학II]-(3) 적분-2 정적분 [미적분]-(2) 미분법-2 여러 가지 미분법
	성취기준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-2 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2017	61
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2017	91, 120
	수학 II	이준열 외	천재교육	2018	121, 123
	미적분	고승은 외	좋은책 신사고	2019	20, 80, 137, 153
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구하면 문제를 해결할 수 있다.

(2) 등비수열의 극한값을 구하고 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 주어진 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[2] 정적분과 미분의 관계와 여러 가지 적분법을 이용하면 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있고, 삼각함수의 그래프를 이용하면 방정식 $f(x)-1=0$의 근을 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[3] (1) 합성함수의 미분법을 알고 주어진 조건 (가)를 이용하여 정적분을 구하면 등식을 증명할 수 있는 문항이다.

(2) 정적분과 부등식에 대한 성질과 주어진 조건을 이용하여 정적분이 포함된 등식을 구하고, 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구함으로써 문제를 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	$x^2-(2+\sqrt{3})^n x+\frac{1}{4}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}=0$의 두 근이 a_n과 $b_n\sqrt{3}$이라는 것을 쓰면	4점
	인수분해하면 $\left\{x-\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right\}\left\{x-\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2}\right\}=0$	2점

하위 문항	채점 기준	배점
	$a_n = \frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\}$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\}$을 구하면	4점
[1](2)	$a_n - b_n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^n$ 과 $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$을 구하면	4점
	$\left\lvert \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right\rvert < 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n = 0$	2점
	$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(a_n^2 - 3b_n^2)}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 구하면	2점
[2]	$f'(x) + f(x) = 1 + \sin x$를 구하면	2점
	적분하면 $e^x f(x) = \int (e^x + e^x \sin x)dx = e^x + \int e^x \sin x dx$	3점
	부분적분법으로 $e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$	3점
	$f(0) = \frac{1}{2}$과 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$를 구하면	3점
	$\sin x = \cos x$와 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 를 구하면	3점
[3](1)	$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$를 쓰면	2점
	$\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt = \left[\{f(t)\}^2\right]_0^x = \{f(x)\}^2 - 1$임을 보이면	4점
[3](2)	$\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt \le \int_0^x \{f(t)\}^2 dt$ 임을 보이면	2점
	$\int_0^x \{f(t)\}^2 dt = \int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt$ 임을 보이면	3점
	$\ln f(x) = \frac{1}{2}x + C$를 구하면	4점
	$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$를 구하면	3점

7. 예시 답안

[1]

(1) 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 a_n과 $b_n\sqrt{3}$은 다음 이차방정식의 두 근이다.

$$x^2-(2+\sqrt{3})^n x+\frac{1}{4}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}=0$$

이 식을 인수분해하면

$$\left\{x-\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right\}\left\{x-\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2}\right\}=0$$

$a_1=2$이므로 $a_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}$, $b_n\sqrt{3}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2}$

따라서 $a_n=\dfrac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}$, $b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}$

(2) (1)에서 $a_n-b_n\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^n$ 이므로

$$a_n^2-3b_n^2=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=1$$

$\left|\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|<1$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(a_n^2-3b_n^2)}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

[2]

문제에서 $f(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)dt=x-\cos x+\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$①

식 ①의 양변을 미분하면

$f'(x)+f(x)=1+\sin x$

이 식의 양변에 e^x를 곱하면

$e^x\{f'(x)+f(x)\}=e^x(1+\sin x)$ $\cdots\cdots$②

$\{e^x f(x)\}'=e^x f'(x)+e^x f(x)$이므로 식 ②의 양변을 적분하면

$e^x f(x)=\displaystyle\int(e^x+e^x\sin x)dx=e^x+\int e^x\sin x dx$ $\cdots\cdots$③

부분적분법에 의하여

$$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x dx\right)$$

이므로 $\displaystyle\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

③에서 $e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ ……④

식 ①의 양변에 $x = 0$을 대입하면 $f(0) = \frac{1}{2}$이므로 $C = 0$

그러므로 ④에서 $e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ 이고 $e^x > 0$이므로

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

방정식 $f(x) - 1 = 0$으로부터 $\sin x = \cos x$

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식의 근은 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

[3]

(1) $\frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$이므로

$\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{d}{dt}\{f(t)\}^2\,dt = \left[\{f(t)\}^2\right]_0^x = \{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 1$

(2) (1)에서 $\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt = \{f(x)\}^2 - 1$

조건 (다)로부터 $\int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt \le \int_0^x \{f(t)\}^2 dt$ …… ①

조건 (나)의 부등식의 양변에 $f(x)$를 곱하면 $f(x) > 0$이므로 $\{f(x)\}^2 \le 2f(x)f'(x)$

양변을 적분하면 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt \le \int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt$ …… ②

①,②로부터 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt = \int_0^x 2f(t)f'(t)\,dt$

양변을 미분하면 정적분과 미분의 관계로부터 $\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$

$f(x) > 0$이므로 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}$ 이고, 양변을 적분하면 $\ln f(x) = \frac{1}{2}x + C$

조건 (가)로부터 $f(0) = 1$이므로 $C = 0$

따라서 $\ln f(x) = \frac{1}{2}x$이고 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$