

2027학년도 논술우수자전형 모의논술 자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 수학적 귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

① $n = 1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

② $n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면
 $n = k + 1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

2. 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x = g(t)$ 로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

3. 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) > 0)$$

[1] $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에서 $n! \geq n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [8점]

[2] 모든 실수 x 에 대하여 $|\sin x| \leq |x|$ 임을 보이고, 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 함수 $f(x) = x^2 + 2\cos x$ 의
최댓값과 최솟값을 구하시오. [12점]

[3] 다음 조건을 만족시키는 삼차 이하의 다항함수 $f(x)$ 를 구하시오. [10점]

(가) $f(0) = 0$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$

(다) $\int_0^1 x e^{f(x)} dx = \frac{e^2 - 1}{4}$

- [4] $x \neq 0, -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^5 + b^5$ 의 값을 구하시오. [10점]

$$\frac{ax+2}{x} + \frac{bx+b-2}{x+1} = \frac{a^2+b^2-1}{x(x+1)} + 2$$

- [5] 어떤 병의 감염 여부를 진단하는 키트로 검사를 할 때, 병에 걸렸는데 양성으로 판정할 확률은 99%, 병에 걸리지 않았는데 양성으로 판정할 확률은 2%라고 한다. 병에 걸린 사람의 비율이 1%인 어느 집단에서 임의로 한 명을 선택하여 이 방법으로 검사를 한 결과 양성으로 판정하였을 때, 그 사람이 실제로 병에 걸렸을 확률을 구하시오. [10점]

■ 출제 의도

- [1] 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.
- [2] 도함수를 활용하여 부등식이 성립하는 것을 증명하는 능력을 평가한다. 함수의 그래프와 성질을 이해하고 함수의 증가와 감소를 조사하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.
- [3] 주어진 조건을 이해하고 활용하는 능력과 정적분의 계산을 통해 조건을 만족시키는 다항함수를 결정할 수 있는 능력을 평가한다.
- [4] 항등식과 유리함수의 성질을 이해하고 다항식의 곱셈과 인수분해를 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.
- [5] 조건부확률의 의미를 이해하고 이를 활용하여 확률 계산을 할 수 있는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

- [1] 수학적 귀납법을 이용하여 4이상인 모든 자연수에 대하여 주어진 부등식이 성립함을 보이면 해결할 수 있는 문항이다.
- [2] 미분가능한 함수의 도함수를 활용하면 부등식이 성립함을 보일 수 있다. 도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 판정하고, 닫힌구간에서 연속인 함수의 최댓값과 최솟값을 구하면 해결할 수 있는 문항이다.
- [3] 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 함수들을 구하고, 조건 (다)의 정적분을 계산하여 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 결정할 수 있는 문항이다.
- [4] 유리식의 분모를 통분하여 주어진 항등식이 성립하는 상수들의 연립방정식을 구한다. 두 상수의 합과 곱의 값을 구하여 다항식을 인수분해하고 대입하면 계산할 수 있는 문항이다.
- [5] 병에 걸렸을 경우와 걸리지 않았을 경우로 나누어서 양성판정을 받을 확률을 구하여 조건부확률을 계산하면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1]	$n = 4$ 일 때 $n! \geq n^2$ 임을 보이면	2
	$k \geq 4$ 이므로 $k^2 \geq k+1$ 임을 보이면	2
	$k \geq 4$ 일 때 $k! \geq k^2$ 라고 가정하여 $(k+1)! \geq (k+1)^2$ 을 보이면	4
[2]	$ \sin x \leq x $ 임을 보이면	3
	$f(x)$ 의 증가와 감소를 조사하면	3
	최솟값 $f(0) = 2$ 를 구하면	2
	최댓값 $f(\pi) = \pi^2 - 2$ 를 구하면	4
[3]	$f(x)$ 는 이차항만 있는 다항식임을 보이면	3
	$\int_0^1 x e^{f(x)} dx$ 의 값을 구하면	4
	$f(x) = 2x^2$ 을 구하면	3
[4]	이차방정식으로 정리하면	2
	$a + b = 2, a^2 + b^2 = 3$ 을 구하면	2
	$ab = \frac{1}{2}$ 을 구하면	2
	$a^5 + b^5 = \frac{29}{2}$ 를 구하면	4
[5]	$P(A \cap B) = \frac{99}{10000}$ 을 구하면	3
	$P(A^c \cap B) = \frac{198}{10000}$ 을 구하면	3
	$P(B) = \frac{297}{10000}$ 을 구하면	2
	$P(A B) = \frac{1}{3}$ 을 구하면	2

■ 예시 답안

[1]

$$n! \geq n^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n = 4$ 일 때 (좌변) $= 4! = 24 \geq 4^2 = 16 =$ (우변)

이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 4)$ 일 때 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면 $k! \geq k^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$

부등식 $\textcircled{2}$ 의 양변에 $k+1$ 을 곱하면 $(k+1)! \geq k^2(k+1) \cdots \cdots \textcircled{3}$

$k \geq 4$ 이면 $k(k-1) \geq 12$ 이므로 $k^2 \geq k+1$ 이다.

부등식 $\textcircled{3}$ 에서 $(k+1)! \geq k^2(k+1) \geq (k+1)^2$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 따라 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에서 $n! \geq n^2$ 이 성립한다.

[2]

$\sin x$ 와 x 의 크기를 비교하기 위해 $g(x) = x - \sin x$ 로 놓으면,

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가하고 $g(0) = 0$ 이므로

$x < 0$ 일 때 $x < \sin x$ 이고 $x > 0$ 일 때 $\sin x < x$ 이다.

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 $|\sin x| \leq |x| \cdots \cdots \textcircled{1}$

함수 $f(x) = x^2 + 2\cos x$ 를 미분하면 $f'(x) = 2(x - \sin x)$

$\textcircled{1}$ 에서 $x < 0$ 이면 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 에서 감소하고

$x > 0$ 이면 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 증가한다.

따라서 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최소이고, 최솟값은 $f(0) = 2$,

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} < f(\pi) \text{이므로 } x = \pi \text{에서 최대이고, 최댓값은 } f(\pi) = \pi^2 - 2$$

[3]

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 로 놓으면

조건 (가)에서 $f(0) = 0$ 이므로 $d = 0$

$f(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx$ 이므로 조건 (나)로부터 $2ax^3 + 2cx = 0$

따라서 $a = c = 0$ 이므로 $f(x) = bx^2 (b \neq 0)$ 즉, $f(x)$ 는 이차항만 가지는 함수이다.

($b = 0$ 이면 조건 (다)를 만족시키지 않는다)

조건 (다)의 정적분을 구하기 위해 $bx^2 = t$ 로 놓으면 $2bx \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$\int_0^1 x e^{bx^2} dx = \int_0^b \frac{1}{2b} e^t dt = \frac{1}{2b} (e^b - 1)$$

조건 (다)로부터 $\frac{1}{2b} (e^b - 1) = \frac{e^2 - 1}{4}$ 이므로 $b = 2$

따라서 $f(x) = 2x^2$

[4]

$$\frac{ax+2}{x} + \frac{bx+b-2}{x+1} = \frac{a^2+b^2-1}{x(x+1)} + 2$$

식의 양변에 $x(x+1)$ 을 곱하여 내림차순으로 정리하면

$$(a+b)x^2 + (a+b)x + 2 = 2x^2 + 2x + a^2 + b^2 - 1$$

$$\text{이므로 } a+b=2, \quad a^2+b^2=3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{이므로 } ab = \frac{1}{2}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 5 \quad \text{이므로}$$

$$a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2b^2(a+b) = \frac{29}{2}$$

[5]

병에 걸릴 사건을 A , 검사 결과가 양성으로 나오는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

양성판정을 받을 확률 $P(B)$ 는 병에 걸렸을 경우와 걸리지 않았을 경우로 나누어 구하면

$$(i) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 10^{-2} \times 0.99 = \frac{99}{10000}$$

$$(ii) \quad P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = (1 - 10^{-2}) \times 0.02 = \frac{198}{10000}$$

$$\text{즉, } P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{297}{10000}$$

따라서 양성판정을 받았을 때 병에 걸렸을 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{99}{297} = \frac{1}{3}$$