

2027학년도 논술우수자전형 모의논술 자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0)$$

3. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

[1] 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^n \ln \left(1 - \frac{1}{(n+k)^2} \right)$ 을 구하시오. [10점]

[2] 아래 조건을 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 미분가능하며 역함수 $g(x)$ 를 가진다.

(나) 모든 실수 x 에서 $g(x) = \ln \sqrt{2xe^{g(x)} + 1}$ 가 성립한다.

(1) 함수 $g(x)$ 를 구하시오. [8점]

(2) 등식 $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} \frac{f(2x) - a}{x - \ln \sqrt{2}} = b$ 가 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. [10점]

[3] 양의 실수에서 정의되는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 정적분 $\int_1^4 f(t)dt$ 의 값을 구하시오.

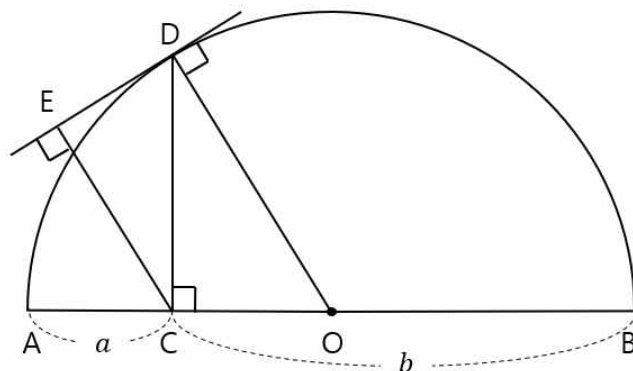
[10점]

$$(가) f(1) = 1$$

$$(나) e^{1-\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) - f'(x) \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[4] 아래 그림을 이용하여 다음 부등식을 증명하시오. (단, 점 O 는 반원의 중심) [12점]

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} \quad (0 < a < b)$$



■ 출제 의도

- [1] 로그 함수와 수열의 합인 $\sum$ 의 성질을 활용하여 수식을 다루는 능력과 자연상수의 정의를 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가한다.
- [2] (1) 함수식의 활용을 바탕으로 역함수 유도 능력을 평가한다.
(2) 미지수를 포함한 극한 문제를 미분의 정의와 역함수의 미분법을 활용하여 풀이 과정에서 논리적으로 해결할 수 있는지를 평가한다.
- [3] 함수들의 곱의 미분에 대한 활용도를 평가하고 치환 적분을 이용한 함수의 정적분 계산 능력을 평가한다.
- [4] 비교 대상의 수식을 기하학적 대상에 투영하여 사고하는 능력과 구하고자 하는 선분의 길이를 계산하는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

- [1] 로그 함수의 성질과 수열의 합인 $\sum$ 의 성질을 활용하여 수식을 간단하게 정리할 수 있다. 정리된 수식에 자연상수의 정의를 활용하여 극한값을 구할 수 있다.
- [2] (1) 함수식을 활용하여 $e^{g(x)}$ 에 대한 이차다항식을 얻는다. 이로부터 근의 공식을 적용하여 $g(x)$ 를 구할 수 있다.
(2) 유한한 극한값을 가지면서 분모가 0으로 수렴하면 분자도 0으로 수렴한다는 사실을 이용한다. 미분의 정의와 역함수의 미분법을 활용하여 극한값을 구할 수 있다.
- [3] 합으로 나열된 함수들의 구성을 인지하여 함수들의 곱의 미분의 역과정을 통해 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있다. 정적분은 치환적분법으로 계산할 수 있다.
- [4] 주어진 두 양수의 합인 반원의 지름을 먼저 계산하여 대응하는 수식을 알아낸다. 이를 바탕으로 대소를 비교할 수식들에 대응하는 선분을 구분하고, 그 길이를 간단한 기하학적 관계를 활용하여 계산해 나갈 수 있다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{2n+1}{2n} \right)^n$ 을 구하면	4
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = e^{\frac{1}{2}}$ 을 각각 구하면	4
	극한값 $-\frac{1}{2}$ 을 구하면	2
[2](1)	$e^{2g(x)} - 2xe^{g(x)} - 1 = 0$ 을 구하면	2
	$e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 을 구하면	4
	$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 을 구하면	2
2	$a = \frac{3}{4}$ 을 구하면	4
	$b = 2f'(\ln 2)$ 를 구하면	2
	$b = \frac{5}{2}$ 를 구하면	4
[3]	$\frac{d}{dx}(e^{1-\sqrt{x}} f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 을 구하면	4
	$f(x) = e^{\sqrt{x}-1} \sqrt{x}$ 를 구하면	2
	$\int_1^4 f(x) dx = 4e - 2$ 를 구하면	4
[4]	$\overline{OD} = \frac{a+b}{2}$ 를 구하면	2
	$\overline{CD} = \sqrt{ab}$ 를 구하면	4
	$\overline{EC} = \frac{2ab}{a+b}$ 를 구하면	4
	$\overline{OD} > \overline{CD} > \overline{EC}$ 로부터 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ 을 구하면	2

■ 예시 답안

[1]

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^n \ln \left(1 - \frac{1}{(n+k)^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right) + \cdots \ln \left(1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left\{ \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} \times \cdots \times \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{2n+1}{2n} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left\{ 1 + \left(-\frac{1}{n} \right) \right\}^n \times \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n \times \frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{1}{n} = t \text{라고 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t} \times (-1)} = \frac{1}{e} \text{이므로} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^n \ln \left(1 - \frac{1}{(n+k)^2} \right) = \ln \left(e^{-1} \times e^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

[2]

(1) 조건 (나)로부터

$$\frac{1}{2} \ln(2xe^{g(x)} + 1) = g(x)$$

이로부터 $e^{g(x)}$ 에 관한 이차방정식을 얻고 이를 풀면

$$\begin{aligned}
 e^{2g(x)} - 2xe^{g(x)} - 1 &= 0 \\
 e^{g(x)} &= x + \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

따라서

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} \frac{f(2x) - a}{x - \ln \sqrt{2}} = b$ 에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} (x - \ln \sqrt{2}) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} \{f(2x) - a\} = 0, \quad \text{즉 } f(2 \ln \sqrt{2}) = f(\ln 2) = a$$

$$f(\ln 2) = a \Leftrightarrow g(a) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) = \ln 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 2 - a$$

양변을 제곱하여 풀면

$$a = \frac{3}{4}$$

함수 g 를 미분하면

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

제시문 2로부터

$$b = 2 \lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} \frac{f(2x) - \frac{3}{4}}{2x - 2 \ln \sqrt{2}} = 2f'(\ln 2) = \frac{2}{g'(f(\ln 2))} = \frac{2}{g'\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}}} = \frac{5}{2}$$

따라서

$$a + b = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{13}{4}$$

(다른 풀이)

$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 로부터 그 역함수 $f(x)$ 를 구하면

$$e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$e^{2g(x)} - 2xe^{g(x)} - 1 = 0$$

$$x = \frac{e^{g(x)} - e^{-g(x)}}{2}$$

따라서

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$a = f(\ln 2) = \frac{3}{4}$$

$$b = 2f'(\ln 2) = 2 \cdot \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{5}{2}$$

[3]

$$e^{1-\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) - f'(x) \right) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} f(x) - e^{1-\sqrt{x}} f'(x) = -\frac{d}{dx} (e^{1-\sqrt{x}} f(x)) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

위 식을 적분하면

$$e^{1-\sqrt{x}} f(x) = \sqrt{x} + C$$

조건(가)로부터 $f(1) = 1$ 이므로 $C = 0$ 이고 다음을 얻는다.

$$f(x) = e^{\sqrt{x}-1} \sqrt{x}$$

$\sqrt{x} - 1 = t$ 라고 치환하고 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned}
\int_1^4 f(x) dx &= \int_1^4 e^{\sqrt{x}-1} \sqrt{x} dx \\
&= 2 \int_0^1 e^t (t+1)^2 dt \\
&= 2 [e^t (t+1)^2]_0^1 - 4 \int_0^1 e^t (t+1) dt \\
&= 8e - 2 - 4 [e^t (t+1)]_0^1 + 4 [e^t]_0^1 \\
&= 4e - 2
\end{aligned}$$

[4]

$\overline{OD}$ 는 반원의 반지름이므로 $\overline{OD} = \frac{a+b}{2}$

직각삼각형 COD에서 $\overline{CO} = \frac{b-a}{2}$ 이므로 피타고라스 정리를 이용하면

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{CO}^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}} = \sqrt{ab}$$

직각삼각형 COD와 직각삼각형 EDC에서 $\angle ECD = \angle CDO$ 이고 $\angle COD = \angle EDC (= \angle ACE)$ 이므로 직각삼각형 COD와 직각삼각형 EDC는 닮음이다.

이로부터 다음 비례관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
\overline{EC} : \overline{CD} &= \overline{CD} : \overline{DO} \\
\overline{EC} &= \frac{\overline{CD}^2}{\overline{DO}} = \frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \\
\overline{OD} > \overline{CD} > \overline{EC} &\text{로부터 } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}
\end{aligned}$$